

## ♣ Baccalauréat C Gabon juin 1977 ♣

### EXERCICE 1

Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, on considère la transformation  $f$  qui à tout point  $m$  d'affixe,  $z$  associe le point  $M$  d'affixe  $Z$  tel que

$$Z = \frac{z + 2i}{1 - iz}$$

1. Déterminer les points invariants de  $f$ .
2. Déterminer l'ensemble des points  $m$  pour lesquels  $Z$  est un nombre réel. Construire cet ensemble de points.
3. Soit  $A$  le point d'affixe  $i$ , quel est l'ensemble des points  $m$  pour lesquels  $A$ ,  $m$  et  $M$  sont alignés?

### EXERCICE 2

Construire dans un plan affine rapporté à un repère orthonormé, l'ensemble des points  $M$  dont les coordonnées  $(x ; y)$  vérifient

$$4y^2 = |9x^2 - 36x|.$$

### PROBLÈME

On désigne par  $F$ , l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur  $\mathbb{R}$  et indéfiniment dérivables, muni de l'addition des fonctions numériques et de la multiplication par les nombres réels.

#### I.

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions numériques  $h$  définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$h(x) = (ax + b)e^x + ce^{-x}.$$

( $a$ ,  $b$  et  $c$  varient dans  $\mathbb{R}$ ).

1. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ . Si  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  sont les éléments de  $E$  définis par

$$h_1(x) = xe^{-x}, \quad h_2(x) = e^x, \quad h_3(x) = e^{-x}$$

montrer que  $(h_1, h_2, h_3)$  est une base de  $E$ .

2. Déterminer par récurrence la dérivée  $n$ -ième,  $h^{(n)}$ , d'une fonction  $h$  appartenant à  $E$ .
3. Soit  $\mathcal{S}$  l'application de  $F$  dans  $F$  définie par

$$\mathcal{S}(f) = f - 2f' + f''. \quad (1)$$

- a. Montrer que  $\mathcal{S}$  est un endomorphisme de  $F$ .
- b. Montrer que  $\mathcal{S}_1$  restriction de  $\mathcal{S}$  à  $E$  est un endomorphisme de  $E$ .

- c. Montrer que  $\mathcal{S}_1$  est la composée d'une projection et d'une homothétie que l'on déterminera.
- d. Déterminer le noyau  $N(\mathcal{S}_1)$  et l'image  $\mathcal{S}_1(E)$  de l'endomorphisme  $\mathcal{S}_1$ .

**II.**

On veut déterminer l'ensemble  $G$  des fonctions  $f$  de  $F$  vérifiant

$$f(x) - 2f'(x) + f''(x) = e^{-x} + x - 1. \quad (1)$$

quel que soit  $x$  réel.

1. Démontrer que l'application  $x \mapsto e^{-x}$  appartient à  $\mathcal{S}_1(E)$  et trouver alors une fonction  $h_0$  telle que  $\mathcal{S}_1(h_0)(x) = e^{-x}$ .
2. Déterminer un polynôme  $p_0$  du premier degré tel que  $\mathcal{S}(p_0)(x) = x - 1$ .
3. Soit  $f$  une fonction de  $F$  appartenant au noyau  $N(\mathcal{S})$  de  $\mathcal{S}$ .
  - a. Calculer la dérivée seconde de la fonction  $g$  définie par  $g(x) = e^{-x}f(x)$ .
  - b. En déduire la forme générale de la fonction  $g$ .
  - c. En déduire l'ensemble  $N(\mathcal{S})$ .
4. Vérifier que  $f$  appartient à  $G$  si, et seulement si  $f - (h_0 + p_0)$  appartient à  $N(\mathcal{S})$ . En déduire l'ensemble  $G$  des fonctions vérifiant l'égalité (1).