

□ Corrigé de l'exercice 1.

1. a. On obtient la figure 1

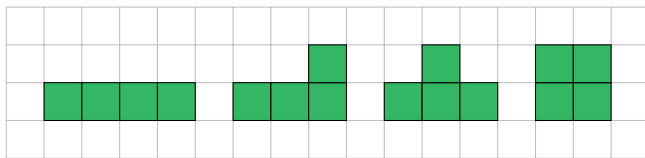


FIGURE 1: Les cinq tétranimos

- b. Il existe 12 pentaminos, voir la figure 2.

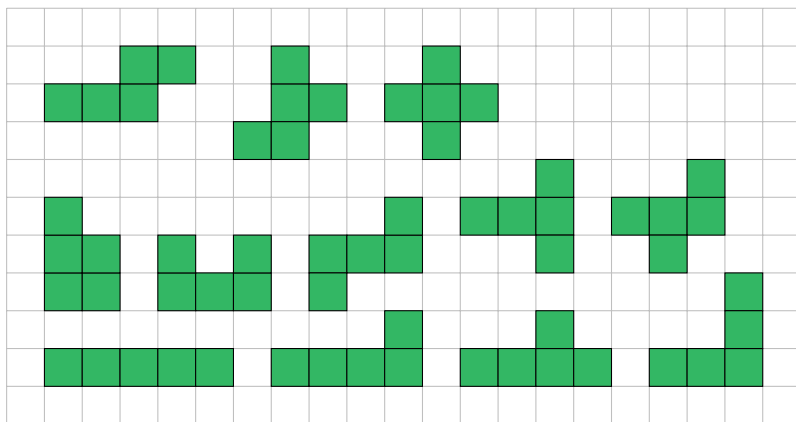


FIGURE 2: Les douze pentaminos

2. a. $A_1 = 1, A_2 = 2$ et $A_3 = 2 + 1 = 3$.
- b. On a $A_{n+2} = A_{n+1} + A_n$. Soit un pavage de $n+2$ domino. Le premier domino est soit vertical et il reste un pavage de $n+1$ dominos, soit il y a deux dominos horizontaux, et alors il reste un pavage de n dominos.
- c. $A_3 = 3, A_4 = 3 + 2 = 5, A_5 = 8, A_6 = 13, A_7 = 21$ et $A_8 = 34$.
3. Un domino couvre une case claire et une case foncée. Or les deux cases enlevées sont des cases foncées. On ne peut donc pas couvrir un tel échiquier.
4. Un tétranimo en T couvre 3 cases d'une couleur et 1 case de l'autre couleur. Alors qu'un carré couvre 2 cases d'une couleur et 2 de l'autre. Or il y a 32 cases claires et 32 foncées. Donc, les quinze tétranimos en T ne pourront couvrir l'échiquier.

□ Corrigé de l'exercice 2.

1. $q(0; 0) = 0; q(0; 1) = 1; q(0; 2) = 4; q(1; 1) = 3; q(1; 2) = 7; (-1; 1) = 1; (-1; 2) = 3$.

2. $49 = q(7; 0) = q(5; 3) = q(8; -5) = q(3; -8) = q(7; -7)$. 18 possibilités.
 $91 = q(1; -10) = q(1; 9) = q(5; 6) = q(9; -10)$. 12 possibilités.
3. Soit m un entier, alors $m^2 = q(m; 0)$ et $3m^2 = q(m; m)$.
4. Soit m un nombre d'Eisenstein, c'est-à-dire que qu'il existe a et b tels que $m = a^2 + ab + b^2$. Alors $4m = 4a^2 + 4ab + 4b^2 = (2a)^2 + (2a)(2b) + (2b)^2 = q(2a; 2b)$.
5.
$$\frac{(2a+b)^2 + 3b^2}{4} = \frac{4a^2 + 4ab + b^2 + 3b^2}{4} = a^2 + ab + b^2.$$

Comme l'expression $\frac{(2a+b)^2 + 3b^2}{4}$ est une somme de carré, $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ et donc les nombres d'Eisenstein sont toujours positifs.

Supposons que 2 soit un nombre d'Eisenstein. Il existe alors a et b entiers tels que $\frac{(2a+b)^2 + 3b^2}{4} = 2$. On en déduit que $(2a+b)^2 + 3b^2 = 8$, soit $(2a+b)^2 = 8 - 3b^2$. On en déduit que $8 - 3b^2 \geq 0$, donc $8 \geq 3b^2$, donc que b vaut $-1, 0$ ou 1 .

- $b = 0$, entraîne que $4a^2 = 8$, donc $a^2 = 2$, c'est impossible, la racine de deux n'est pas un entier.
- $b = -1$, entraîne $(2a-1)^2 = 5$. Or la racine de 5 n'est pas un entier, donc le cas est impossible.
- $b = 1$, de la même manière, ce cas n'est pas possible.

On en déduit que 2 n'est pas un nombre d'Eisenstein.

6. On a, si n est un nombre d'Eisenstein, alors :

$$\frac{(2a+b)^2 + 3b^2}{4} = n$$

On en déduit, alors, $\frac{3n^2}{4} \leq n$, soit $0 \leq b \leq \sqrt{\frac{4n}{3}}$.

Puis, $(2a+b)^2 \leq 4n$, soit $-2\sqrt{n} \leq 2a+b \leq 2\sqrt{n}$. On en déduit que $-\frac{b}{2} - \sqrt{n} \leq a \leq -\frac{b}{2} + \sqrt{n}$.

Ces deux inégalités vont permettre de donner un algorithme qui permettra de donner les nombres d'Eisenstein inférieur à une valeur donnée. Il en trouve d'autre mais on ne retiendra que celle entre 0 et n .

On a donc l'algorithme suivant :

Un programme python qui trouve tous les nombres d'Eisenstein, ainsi que les différentes méthodes pour atteindre ce nombre. Il ne s'agit de ne trouver que les nombres atteints, on peut donc faire beaucoup plus simple.

```

pour b allant de 0 à  $\sqrt{\frac{4n}{3}}$  faire
|
|   pour a allant de  $-\frac{b}{2} - \sqrt{n}$  à  $-\frac{b}{2} + \sqrt{n}$  faire
|   |
|   |   si  $q(a; b)$  n'est pas dans la liste et  $q(a, b) \leq n$  alors
|   |   |
|   |   |   ajouter (a; b) à la liste
|   |   fin
|   fin
fin

```

```

from math import *

def Eisentein(n):
    """
    Détermine tous les entiers d'Eisentein entre 0 et n
    n est entier d'Eisentein si  $n = a^2 + ab + b^2$ 
    =  $((2a+b)^2 + 3b^2)/4$ 
    renvoie un dictionnaire dont la clé est n, et les valeurs sont
    stockées dans une liste de tuple.
    """
    resultat = {}
    maxb = int(sqrt(4*n/3))
    for b in range(0, maxb):
        for a in range(int(-b/2 - sqrt(n)), int(-b/2 + 2*sqrt(n))+1):
            m = a*a + a*b + b*b
            if m in resultat :
                liste = resultat[m]
                liste.append((a,b))
                resultat[m]=liste
            elif m not in resultat and m<= n :
                resultat[m] = [(a,b)]

    resultatTrie = {}
    for i in range(n) :
        if i in resultat :
            resultatTrie[i] = resultat[i].copy()
    return resultatTrie

print(Eisentein(25))

```

On obtient : 0: [(0, 0)], 1: [(-1, 0), (1, 0), (-1, 1), (0, 1)], 3: [(-2, 1), (1, 1), (-1, 2)], 4: [(-2, 0), (2, 0), (-2, 2), (0, 2)], 7: [(-3, 1), (2, 1), (-3, 2), (1, 2), (-2, 3), (-1, 3)], 9: [(-3, 0), (3, 0), (-3, 3), (0, 3)], 12: [(-4, 2), (2, 2), (-2, 4)], 13: [(-4, 1), (3, 1), (-4, 3), (1, 3), (-3, 4), (-1, 4)], 16: [(-4, 0), (4, 0), (-4, 4), (0, 4)], 19: [(-5, 2), (3, 2), (-5, 3), (2, 3)], 21: [(-5, 1), (4, 1), (-5, 4), (1, 4)]

Les nombres d'Eisentein sont donc 0, 1, 3, 4, 7, 9, 12, 16 et 19.

7. Posons $a = 3p + r$ et $b = 3q + s$ avec r et s des entiers compris entre 0 et 2.

Considérons :

$$\begin{aligned} a^2 + ab + b^2 &= (3p + r)^2 + (3p + r)(3q + s) + (3q + s)^2 \\ &= 3N + r^2 + rs + s^2 \end{aligned}$$

Il nous faut regarder les valeurs de $r^2 + rs + s^2$. On obtient le tableau 1, on ne regarde que le reste de la division par 3. On constate que l'on ne peut avoir de nombre de la forme $3n - 1$ ou ce qui revient au même, de nombre de la forme $3n + 2$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 0 |

TABLE 1

8. Développons les deux expressions.

$$\begin{aligned} (a^2 + ab + b^2)(c^2 + cd + d^2) &= a^2c^2 + a^2cd + a^2d^2 \\ &\quad + abc^2 + abcd + abd^2 \\ &\quad + b^2c^2 + b^2cd + b^2d^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ac + bc + bd)^2 + (ac + bc + bd)(ad - bc) + (ad - bc)^2 \\ &= a^2c^2 + abc^2 + abcd + abc^2 + b^2c^2 + b^2cd + abcd \\ &\quad + b^2cd + b^2d^2 + a^2cd + abcd + abd^2 - abc^2 \\ &\quad - b^2c^2 - b^2cd + a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \\ &= a^2c^2 + a^2cd + a^2d^2 \\ &\quad + abc^2 + abcd + abd^2 \\ &\quad + b^2c^2 + b^2cd + b^2d^2 \end{aligned}$$

On en déduit que le produit de deux nombres d'Eisenstein $q(a; b)$ et $q(c; d)$ est le nombre d'Eisenstein $q(ac + bc + bd; ac - bc)$.

9. Soit n un multiple de 9.

n est un nombre d'Eisenstein si et seulement si $\frac{n}{3}$ est un nombre d'Eisenstein.

Commençons par démontrer que si $\frac{n}{3}$ est un nombre d'Eisenstein alors n l'est aussi.

On peut écrire $n = 3 \times \frac{n}{3}$, or le produit de deux nombres d'Eisenstein est un nombre d'Eisenstein.

Réciproquement, si n est un nombre d'Eisenstein, alors $\frac{n}{3}$ est aussi un nombre d'Eisenstein.

$$n = a^2 + ab + b^2, \text{ avec } a = 3p + r \text{ et } b = 3q + s.$$

Alors

$$a^2 + ab + b^2 = 9(p^2 + pq + q^2) + 3(2pr + ps + qr + 2qs) + r^2 + rs + q^2$$

En étudiant cette expression, nous devons déjà avoir $r^2 + rs + q^2$ multiple de 9. Or, l'observation du tableau de la question amène à dire que $r = s$.

- $r = s = 0$, soit a et b sont tous les deux divisibles par 3, alors $\frac{n}{9} = q\left(\frac{a}{3}; \frac{n}{3}\right)$.

Alors, on a $\frac{n}{3} = 3 \times \frac{n}{9}$, et on en déduit que $\frac{n}{3}$ est un nombre d'Eisenstein.

- $r = s = 1$, on a alors

$$a^2 + ab + b^2 = 9(p^2 + pq + q^2) + 3(2p + p + q + 2q) + 3$$

qui n'est pas multiple de 9.

- $r = s = 2$

$$a^2 + ab + b^2 = 9(p^2 + pq + q^2) + 3(4p + 2p + 2q + 4q) + 12$$

qui n'est pas multiple de 9.

□ Corrigé de l'exercice 3.

Partie A

1. Le côté vertical coupe le rayon en son milieu, donc la hauteur est 15m. On en déduit que le côté du triangle est : $10\sqrt{3}$
2. Matthias voit les 3 clôtures si il se situe dans le triangle. Donc, la probabilité est donc :

$$\frac{15 \times 10\sqrt{3}}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{100\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}.$$

3. Matthias ne voit qu'une clôture si il est à l'extérieur du triangle, donc la probabilité est $1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Partie B

1. Quand le rayon devient grand, la probabilité de voir les 3 clôtures se rapproche de 0.
2. Lorsque le rayon du cercle devient très grand, la probabilité de voir 2 clôtures, se rapproche de $\frac{1}{2}$. En effet, Matthias est dans une des parties ADI , BEF ou CHG . Le triangle ABC est petit devant les 6 autres parties, qui sont donc à peu près de la même aire.
3. Pour ne voir qu'une seule clôture, il faut être dans le complémentaire des questions précédentes. Donc, la encore, quand le rayon est grand, la probabilité de voir une seule clôture est $\frac{1}{2}$.

Partie C

1. Dans le triangle IAO est isocèle en A . L'angle \widehat{IAB} mesure 120° . L'angle \widehat{BAO} mesure 30° . Donc, $120 + 30 + 15 + x = 180$, donc $x = 15$.

On en déduit que : $\cos(15) = \frac{\frac{R}{2}}{10} = \frac{R}{20}$.

Donc, $R = 20 \cos(15) = 5(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.

L'aire du disque est donc :

$$25\pi(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = 25\pi(8 + 4\sqrt{3}) = 100\pi(2 + \sqrt{3}).$$

On en déduit que la probabilité cherchée est :

$$\begin{aligned} \frac{75\sqrt{3}}{100\pi(2 + \sqrt{3})} &= \frac{3\sqrt{3}}{4\pi(2 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{3\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{4\pi(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \\ &= \frac{3\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{4\pi} \end{aligned}$$

2. Matthias se situe dans les secteurs ADI , BEG ou CFH .

L'aire de ces parties est l'aire d'un secteur angulaire de rayon R , moins le double de l'aire du triangle AIO .

La hauteur du triangle AIO est $10 \sin(15)$, la base vaut $R = 20 \cos(15)$.

On en déduit que l'aire du triangle AIO est : $100 \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{100}{4^2} (6 - 2) = 25$.

L'aire de l'arc \widehat{IOD} a pour aire :

$$\begin{aligned}A_{IOD} &= (20 \cos(15)) ^2 \times \pi \times \frac{30}{360} \\ &= \frac{25\pi}{12} (\sqrt{6} + \sqrt{2}) ^2 \\ &= \frac{25\pi}{12} (6 + 2 \times 2\sqrt{3} + 2) \\ &= \frac{25\pi}{3} (2 + \sqrt{3})\end{aligned}$$

On en déduit que l'aire de ADI est :

$$\begin{aligned}A_{ADI} &= \frac{25\pi}{3} (2 + \sqrt{3}) - 50 \\ &= \frac{25\pi(2 + \sqrt{3}) - 150}{3}\end{aligned}$$

On en déduit que la probabilité est :

$$\begin{aligned}p &= 3 \frac{\frac{25\pi(2 + \sqrt{3}) - 150}{3}}{100\pi(2 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{150}{100\pi(2 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{2\pi(2 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3(2 - \sqrt{3})}{2\pi}\end{aligned}$$

3. La probabilité de ne voir qu'une seule clôture est obtenue par différences :

$$\begin{aligned}p &= 1 - \frac{3\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{4\pi} - \frac{1}{4} + \frac{3(2 - \sqrt{3})}{2\pi} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{12 - 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 9}{4\pi} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{21 - 12\sqrt{3}}{4\pi}.\end{aligned}$$

□ Corrigé de l'exercice 4.

- Il y a 3 nombres premiers entre 1 et 6, donc la probabilité de perdre au premier lancer est $\frac{1}{2}$.
 - Au premier lancer, il faut arriver sur les cases 1, 4 et 6. On regarde les lancers perdants à partir de ces cases. Couples de lancers perdants : (1; 1), (1; 2), (1; 6), (4; 1), (4; 3), (6; 1) et (6; 5). Donc $\frac{7}{36}$.

2. a. La partie se termine sur le 2 soit si on tire le 2 au premier lancer, soit si on a (1; 1). La probabilité est donc de $\frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{7}{36}$.
- b. Soit on tire 2 et 3 au premier lancer, donc $\frac{2}{6}$, soit on a eu (1; 1) et (1; 2), soit $\frac{2}{36}$, au final la probabilité est de $\frac{14}{36}$.
3. a. La boucle tant que permet de jouer un nouveau tour et de mettre à jour le compteur Perdu et le compteur S.
- b. $ENT(6 * ALEA() + 1)$ permet de simuler un lancer de dé équilibré à 6 faces.
- c. L'algorithme simule N parties, S compte le nombre de parties gagnées.
- d. L'algorithme donne donc la fréquence de gain pour ce jeu.
4. Le calcul exact semble difficile. On peut simuler ce travail avec le programme python.

```

from random import *
N = 100000

def de6():
    d = int(6*random()+1)
    return d

LPremier=[2,3,5,7,11,13,17,19,23]
S = 0

for i in range(N):
    Pion = 0
    P = 0
    while Pion < 24 and P == 0:
        Pion = Pion + int(6*random()+1)
        if Pion in LPremier :
            P = 1
    if P == 0:
        S = S + 1
print(S/N)

```

Différents essais avec le script précédent donne une probabilité de gain de l'ordre 6%.

Les réponses aux questions 1b, 2a, 2b sont aussi testées avec des simulations numériques, avec le programme python suivant. Le programme confirme les probabilités calculées.


```

from random import *
def de6():
    d = int(6*random()+1)
    return d

def perteLigne1(N=1000) :
    S = 0
    for i in range(N):
        lancerA = de6()
        if lancerA == 1 :
            lancerB = de6()
            if lancerB == 1 :
                S = S + 1
            if lancerB == 2 :
                S = S + 1
        if lancerA == 2 :
            S = S+1
        if lancerA == 3 :
            S = S+1
    return S/N
def perteLance2(N=1000):
    S = 0
    for i in range(N):
        lancerA = de6()
        if lancerA ==1:
            lancerB = de6()
            if lancerB == 1:
                S = S+1
            if lancerB == 2:
                S = S+1
        if lancerA ==4:
            lancerB = de6()
            if lancerB == 1:
                S = S+1
            if lancerB == 3:
                S = S+1
        if lancerA ==6:
            lancerB = de6()
            if lancerB == 1:
                S = S+1
            if lancerB == 5:
                S = S+1
    return S/N
def perteAvec2(N=1000):
    S = 0
    for i in range(N):
        lancer = de6()
        if lancer == 2:
            S = S + 1
        if lancer == 1 :
            lancer = de6()
            if lancer == 1 :
                S = S+1
    return S/N
print("Simulation de la perte sur le nombre 2")
print("#####")
print(perteAvec2(N=int(1e6)),7/36)
print("Simulation de la perte à la 1ere ligne")
print("#####")
print(perteLigne1(N=int(1e6)),14/36)
print("Simulation de la perte au 2e lancer ")
print("#####")
print(perteLancer2(N=int(1e6)),7/36)

```