Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Grenoble septembre 1975 ∾

EXERCICE 1

Soit $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ une base orthonormée d'un plan vectoriel euclidien $\mathscr{P}$.

Partie A

1. On pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}$ et on appelle φ l'application linéaire de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ telle que

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi\left(\overrightarrow{u}\right) = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{u}\\ \varphi\left(\overrightarrow{v}\right) = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{v}\end{array}\right.$$

   Montrer que $\mathscr{B}' = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est une base orthogonale de $\mathscr{P}$.
   En déduire que l'application linéaire φ est entièrement déterminée et écrire sa matrice B dans la base $\mathscr{B}'$.
2. Montrer que φ est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une isométrie vectorielle de $\mathscr{P}$ que l'on précisera.
3. Calculer $B^n = B^{n-1} \times B, \quad n \in \mathbb{N}^\star$.
   En déduire la matrice A_n de $\varphi^n = \varphi^{n-1} \circ \varphi$ dans la base $\mathscr{B}$.Expliciter la matrice A_1 que l'on notera A.

Partie B

Soit $\mathscr{R} = (\mathrm{O}, \mathscr{B})$ un repère orthonormé d'un plan affine euclidien P associé à $\mathscr{P}$.
On appelle f l'application affine de P associée à l'application linéaire φ et telle que $\mathrm{O}' = f(\mathrm{O})$ ait pour coordonnées (1 ; 2) dans $\mathscr{R}$.

1. Montrer que les coordonnées $\left(x' ; y'\right)$ du point $M' = f(M)$ s'expriment en fonction des coordonnées $(x ; y)$ du point M par les relations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \dfrac{-3x+4y}{10} + 1\\ y' & = & \dfrac{4x+3y}{10} + 2\end{array}\right.$$

2. Quel est l'ensemble des points invariants par f ? Montrer qu'il existe une homothétie ponctuelle H et une isométrie affine S telles que :

$$f = H \circ S = S \circ H.$$

   Reconnaître la transformation f. Préciser ses éléments caractéristiques et faire une figure indiquant la construction du transformé d'un point par f.

3. Quelle est l'image par f de la droite (D) d'équation

$$3x - 4y + 10 = 0 \text{ ?}$$

Plus généralement, quelle est l'image par f d'une droite d'équation

$$ax + by + c = 0 \text{ ?}$$

Existe-t-il des droites globalement invariantes par f ? Pouvait-on prévoir le résultat ?

4. Soit Ω le point de coordonnées $(2;4)$ et M le point de coordonnées $(x~;~y)$ $(M \neq \Omega)$.
On définit la suite de points :

$$M_0 = M; \quad M_1 = f(M_0)~; \quad M_2 = f(M_1)~; \ldots; \quad M_n = f(M_{n-1})~; \ldots$$

En utilisant les résultats du B 2., montrer que les points M_n appartiennent, suivant la parité de n, à l'une ou l'autre de deux droites que l'on précisera.

5. Calculer les composantes $(X_n~;~Y_n)$ du vecteur $\overrightarrow{\Omega M_n}$ dans la base $\mathscr{B}$, en fonction de x et y.
Quelle est la position limite du point M_n lorsque n augmente indéfiniment ?

6. On choisit $(x~;~y) = \left(\dfrac{1}{2}~;~\dfrac{19}{4}\right)$.
Montrer que, si l'on pose $Z_n = d(\Omega,~M_n)$ (Z_n est la distance euclidienne des points Ω et M_n).
Z_n est le terme général d'une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
Quelle est la plus petite valeur de n telle que $d(\Omega,~M_n) < 0,001$?

EXERCICE 2

Soit f la fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$f(x) = \text{Log}\,\frac{x-1}{x+1}$$

1. Étudier la fonction f, et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$.

2. Montrer que la fonction f est intégrable sur $[2;3]$. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du , domaine plan délimité par la courbe C, la droite $\left(\text{O},~\overrightarrow{\imath}\right)$, et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$ (on pourra songer â faire une intégration par parties).

3. On appelle g, la restriction de f à $]1~;~+\infty[$. Montrer que g est une bijection de $]1~;~+\infty[$ sur $]-\infty~;~0[$. Déterminer g^{-1}.

EXERCICE 3

On rappelle que l'ensemble S des suites réelles muni de l'addition des suites et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On note (u_n) une suite et u_n $(n \in \mathbb{N})$ le terme de rang n de la suite (u_n).

On considère l'ensemble E des suites (u_n) vérifiant la relation :

$$u_n = 4\left(u_{n-1} - u_{n-2}\right), \quad n \in \mathbb{N} - \{0\ ;\ 1\}.$$

1. Montrer que E muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un sous-espace vectoriel de S.

2. Déterminer r $(r \in \mathbb{R}^\star)$ pour que la suite géométrique (r^n) soit élément de E. On désignera par a_0, a_1, …, a_n les termes de rang 1, 2,…, $n+1$ de la suite (r^n).

Montrer que la suite (nr^n) est élément de E. On désignera par $b_0, b_1, \ldots, b_n$ les termes de rang 1, 2,…, $n+1$ de cette suite (nr^n).

3. Soit (u_n) un élément quelconque de E. Montrer qu'il existe un couple unique de réels $(\lambda,\ \mu)$ tel que :

$$\begin{array}{rcl} u_0 & = & \lambda a_0 + \mu b_0 \\ u_1 & = & \lambda a_1 + \mu b_1. \end{array}$$

Montrer que, quel que soit n, $n \in \mathbb{N}$, u_n est de la forme :

$$u_n = \lambda a_n + \mu b_n$$

En déduire une base pour E et l'expression en fonction de u_0, u_1 et n, du terme général u_n d'un élément quelconque (u_n) de E.