Baccalauréat C Grenoble juin 1971

EXERCICE 1

$\mathbb{R}$ étant l'ensemble des nombres réels, on désigne par f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(x) & = & x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{pour} \quad x < 0, \\ f(x) & = & 0 & \text{pour} \quad x \geqslant 0. \end{array}\right.$$

1. Montrer que la fonction f est continue pour $x = 0$.
2. f admet-elle une dérivée pour $x = 0$?

EXERCICE 2

n étant un entier naturel, on pose

$$A_n = 2^n + 22^n + 23^n.$$

Montrer que, pour tout n, A_{n+3} est congru à A_n modulo 7.
En déduire les entiers n tels que A_n soit divisible par 7.
Les nombres qui, dans le système de numération à base deux, s'écrivent

1 110,

1 010 100,

1 001 001 000

sont-ils divisibles par 7 ?

PROBLÈME

On considère les deux fonctions de la variable t définies par

$$a(t) = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad b(t) = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}$$

où e désigne la base des logarithmes népériens.

1. Démontrer les identités suivantes :

$$\begin{array}{lcl} a^2(t) - b^2(t) & = & 1, \\ a^2(t) + b^2(t) & = & a(2t) \text{ et} \\ 2a(t).b(t) & = & b(2t). \end{array}$$

2. *t est fixé.* - Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$, on définit la transformation ponctuelle T_t qui, à tout point M de coordonnées $(x~;~y)$, fait correspondre le point M' de coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$ tel que

$$\begin{array}{lcl} x' & = & a(t)x + b(t)y, \\ y' & = & b(t)x + a(t)y. \end{array}$$

a. Démontrer que la transformation T_t est une application bijective du plan sur lui-même.

Exprimer x et y en fonction de x' et de y'.

b. Déterminer les points doubles de cette transformation.

c. Soit M' le transformé de M par T_t et M'' le transformé de M' par T_t. Exprimer les coordonnées $(x'' ; y'')$ de M'' en fonction des coordonnées $(x ; y)$ de M.

3. M' étant le transformé de M par T_t démontrer que, si M' est en outre l'homologue de M dans une homothétie de centre O et de rapport λ, λ est solution de l'équation $\lambda^2 - 2\lambda a(t) + 1 = 0$.

Calculer les valeurs de λ.

En déduire que M et M' appartiennent à l'une ou l'autre de deux droites, que l'on déterminera.

4. Soit (D) la droite d'équation $ux + vy + h = 0$. Montrer que l'homologue de (D) par T_t est une droite (D$'$).

Quelles sont les droites (D) qui sont parallèles à leur homologue (D$'$) ?

5. Soit A le point de coordonnées (+ 1 ; 0) et A$'$ le transformé de A par T_t. Déterminer les coordonnées $(\alpha ; \beta)$ de A$'$ dans le repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ et les coordonnées de A$'$ dans le repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ déduit du précédent par la rotation de centre O et d'angle $\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

6. On considère le point, P, dont les coordonnées dans le repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ sont $X = \text{e}^{-t}$ et $Y = \text{e}^{t}$.

Par quelle transformation se déduit-il du point A$'$?

En supposant que t désigne le temps, construire la trajectoire (C) du point P. On désigne par $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{\Gamma}$ les vecteurs vitesse et accélération du point P.

Déterminer l'ensemble des points, S, tels que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{V}$. Comment peut-on déduire de (C) l'ensemble des points, G, tels que $\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{\Gamma}$? Écrire l'équation de cet ensemble.

r étant une longueur donnée, former l'équation permettant de déterminer à quelle date le mobile se trouve à une distance r de l'origine O.

Pour certaines valeurs de r il existe deux dates possibles, t_1 et t_2.

Quelle relation, indépendante de r, existe-t-il entre t_1 et t_2 ?

Résoudre l'équation dans le cas où $r = \sqrt{6}$.