Durée : 4 heures

Baccalauréat C Grenoble juin 1972

EXERCICE 1

Dans le plan complexe, au point m, d'affixe z, on fait correspondre le point M, d'affixe Z, par la transformation T_k définie par

$$Z = k\mathrm{i}z + 1 + k^2,$$

k étant un paramètre réel strictement positif et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Quelle est la nature de la transformation T_k ? Montrer que T_k possède un point invariant, et un seul, ω_k, que l'on déterminera. Préciser les éléments caractéristiques de T_k.
2. Déterminer l'ensemble des points ω_k, lorsque k décrit l'ensemble des réels positifs.
3. k_1 et k_2 étant deux réels strictement positifs, on considère la transformation $T_{k_2} \circ T_{k_1}$ composée de T_{k_1} et T_{k_2} (dans cet ordre).
   Montrer que $T_{k_1} \circ T_{k_2} = T_{k_2} \circ T_{k_1}$ si, et seulement si, $k_1 = k_2$.
   Quelle est la nature de la transformation $T_k \circ T_k$?

EXERCICE 2

L'ensemble $\mathbb{N}^\star$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.

1. x et y étant deux éléments de $\mathbb{N}^\star$, premiers entre eux, démontrer que les entiers $x + y$ et xy sont, l'un pair, l'autre impair.
2. Déterminer, dans $\mathbb{N}^\star$, les diviseurs de 84 et les donner dans l'ordre croissant.
3. Déterminer dans $\mathbb{N}^\star$ les entiers, a et b, vérifiant simultanément les conditions

$$\begin{array}{lrcl} (1) & a+b & = & 84, \\ (2) & M & = & \Delta^2, \end{array}$$

   où M est le plus petit commun multiple de a et de b, et Δ est leur plus grand commun diviseur.
   On pourra poser $a = \Delta a'$ et $b = \Delta b'$.

PROBLÈME

On rappelle que $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls et $\operatorname{Log} x$ le logarithme népérien du nombre réel positif x.

Partie A

On considère la fonction g, de R_+ dans $\mathbb{R}_+$, telle que

$$g(t) = \frac{2t}{1+t} - \text{Log}(1+t).$$

1. Étudier les variations de cette fonction.

Montrer qu'il existe un nombre a unique tel que $a > 1$ et $g(a) = 0$.

Montrer que 4 est une valeur approchée à 0,1 près de a. Les calculs devront figurer sur la copie; indiquer la table numérique utilisée.

2. Calculer la limite de $\dfrac{g(t)}{t}$

a. quand t tend vers zéro,

b. quand t tend vers $+\infty$.

Construire la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction g dans un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ du plan affine euclidien. On choisira $\left\|\overrightarrow{\imath}\right\| = 1$ et $\left\|\overrightarrow{\imath}\right\| = 10$, l'unité de longueur étant le centimètre.

3. En remarquant que l'on a $\dfrac{t}{t+1} = 1 - \dfrac{1}{1+t}$, calculer l'aire, S, du domaine limité par l'axe des abscisses $t'\text{O}t$ et l'arc de la courbe $(\mathscr{C})$ dont les points ont une ordonnée positive ou nulle.

Exprimer S sous la forme d'une fraction rationnelle de a.

Partie B

On considère la fonction f, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$(x) = \text{e}^{-x}\text{Log}\left(1 + \text{e}^{2x}\right).$$

1. Vérifier que $f''(x)$ a le même signe que $g\left(\text{e}^{2x}\right)$.

En déduire le sens de variation de la fonction f.

Montrer que le maximum de $f(x)$ est $\dfrac{2\sqrt{a}}{1+a}$.

2. Déterminer la limite de $f(x)$

a. quand x tend vers $+\infty$; on pourra remarquer que $1 + \text{e}^{2x} = \text{e}^{2x}\left(1 + \text{e}^{-2x}\right)$;

b. quand x tend vers $-\infty$; on pourra poser $\text{e}^{2x} = u$ et faire apparaître $\text{Log}\,(1 + u)$.