

♣ Baccalauréat C Grenoble juin 1976 ♣

EXERCICE 1

On considère la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = \text{Log}(x-1) + \text{Log}(x+1) - 1$$

où Log désigne le logarithme népérien.

1. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Préciser l'abscisse du point d'intersection de cette courbe avec la droite (O, \vec{i}) .
2. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque g . Préciser le domaine de définition et l'ensemble des valeurs de g ; expliciter cette fonction.

EXERCICE 2

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de E .
On considère l'application linéaire f de E dans lui-même définie par :

$$\begin{cases} f(\vec{i}) &= 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ f(\vec{j}) &= -2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k} \\ f(\vec{k}) &= 2\vec{i} + 2\vec{j} \end{cases}$$

1. Déterminer le noyau de f et en donner une base.
2. Déterminer l'image P de f . On en donnera une équation cartésienne et une base.
3. On considère l'application linéaire f_1 de P dans lui-même définie par

$$\forall \vec{u} \in P, \quad f_1(\vec{u}) = f(\vec{u}).$$

Quelle est la nature de f ?

PROBLÈME

Soit A et B les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Partie A

On désigne par \mathcal{M} l'ensemble des matrices $\lambda A + \mu B$ où $(\lambda; \mu)$ décrit \mathbb{R}^2 .

1. Montrer que \mathcal{M} est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre deux et que (A, B) en est une base.
2. Calculer $A^2, B^2, A \times B$ et $B \times A$ et en déduire le produit de deux matrices quelconques de \mathcal{M} .
3. Montrer que \mathcal{M} , muni de l'addition et de la multiplication des matrices, est un anneau commutatif et unitaire. Quels en sont les éléments inversibles?

Partie B

Soit P un plan affine euclidien et $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de ce plan. Pour toute valeur réelle de λ , on considère l'application affine f_λ de P dans lui-même définie de la façon suivante :

- l'application linéaire associée à f_λ a pour matrice $M_\lambda = \lambda A + B$ relativement à la base (\vec{i}, \vec{i}) ;
- l'image de O par f_λ est le point O' de coordonnées

$$\begin{cases} x_\lambda &= \frac{1}{3}(\lambda + 1) \\ y_\lambda &= \frac{2}{9}(\lambda + 1)^2 \end{cases}$$

relativement au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Pour quelle valeur de λ l'application f_λ est-elle non bijective? Quelle est alors l'image de P par f_λ ?
2. Montrer que l'application f_λ admet une droite de points invariants uniquement pour $\lambda = -1$ et $\lambda = 2$. Écrire une équation cartésienne de cette droite dans chacun de ces cas.
3. Soit s l'application f_λ correspondant à $\lambda = -1$. Montrer que s est une isométrie affine que l'on précisera.
4. Soit g l'application f_λ correspondant à $\lambda = 2$. On désigne par M' l'image par g d'un point M de P .
 - a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ appartient à une direction indépendante de M .
 - b. Soit H le symétrique de M' par rapport à M . Quel est l'ensemble des points H ? En déduire une construction géométrique de M' à partir de M .

Partie C

Soit M_0 le point de coordonnées $(3; 1)$ relativement au repère de P $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère la suite de points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de P définis par

$$M_{n+1} = g(M_n).$$

On appelle x_n et y_n les coordonnées de M_n .

1. Montrer que les points M_n appartiennent tous à une même droite dont on écrira une équation cartésienne.

En déduire une relation liant x_{n+1} et x_n pour tout entier naturel n .

2. Montrer que, pour tout entier naturel n , x_n et y_n sont :

- soit tous deux divisibles par 5;
- soit premiers entre eux.

3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = 2^{n+1} + 1.$$

Établir que x_n est divisible par 5 si et seulement si x_{n+4} est divisible par 5. En déduire les valeurs de n pour lesquelles x_n et y_n sont tous deux divisibles par 5.