

♣ Baccalauréat C Grenoble juin 1977 ♣

EXERCICE 1

4 POINTS

Soit f la fonction de variable réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{Log}(x^2) & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

(Log désigne le logarithme népérien. On rappelle qu'on a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \text{Log} x = 0$.)

1. La fonction f est-elle continue au point $x = 0$? Est-elle dérivable en ce point? Si oui, calculer la dérivée au point $x = 0$.
2. Étudier les variations de la fonction f . Tracer la courbe (\mathcal{C}) représentation graphique de f dans un repère orthonormé. Précisez les tangentes à la courbe (\mathcal{C}) aux points d'abscisse 1 et -1 .
3. En faisant une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$I = \int_1^\alpha f(x) dx \quad \text{pour } \alpha > 0.$$

Cette intégrale a-t-elle une limite quand α tend vers zéro? Si oui, peut-on interpréter géométriquement cette limite?

EXERCICE 2

4 POINTS

Soit n un entier naturel, $n \geq 2$.

1. Soit Q la fonction polynôme de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$Q(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}.$$

Donner, en utilisant une fonction rationnelle, une autre expression de $Q(x)$ pour $x \neq 1$. À l'aide d'une dérivation, en déduire une autre expression de la somme

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n-1)x^{n-2}.$$

2. Soit p un nombre réel, $0 < p < 1$. Un coureur s'entraîne sur un parcours comportant n haies, numérotées de 1 à n . Pour chaque entier i tel que $1 \leq i \leq n$, la probabilité de renverser la i -ème haie est p .

Le coureur poursuit son parcours jusqu'à la n -ième haie, quel que soit le nombre de haies renversées.

Soit X la variable aléatoire définie comme suit :

$$X = \begin{cases} n+1 & \text{si aucune haie n'est renversée} \\ k & \text{si } k \text{ est le numéro de la première haie renversée} \end{cases}$$

- a. Calculer en fonction de p et k la probabilité de l'évènement $(X = k)$, notée $P(X = k)$; préciser $P(X = 1)$ et $P(X = n + 1)$.
Vérifier qu'on a :

$$P(X = 1) + P(X = 2) + \dots + P(X = n + 1) = 1$$

- b. Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de n et p .

PROBLÈME**12 POINTS**

Le plan affine P est rapporté à un repère cartésien $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On note P' l'ensemble des points d'abscisse non nulle de P , et D^0 l'ensemble des points d'abscisse nulle.

On définit dans P la loi de composition interne, notée \star , qui au couple de points $(m; m')$ de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ associe le point $m \star m'$ de coordonnées $(xx'; xy' + y)$.

Partie A

1. Montrer que la loi \star est associative. Montrer qu'il existe un élément neutre E , qu'on déterminera.
2. Déterminer l'ensemble des points de P qui admettent un symétrique pour la loi \star ; déterminer les coordonnées du symétrique du point M de coordonnées $(x; y)$, lorsque celui-ci existe. Quelle est la structure de (P', \star) ?
3. Soit M_0 un point de P , de coordonnées $(x_0; y_0)$. Déterminer l'ensemble G des points de P^\star qui commutent avec M_0 ; montrer que c'est un sous-groupe commutatif de (P', \star) . Dans quel cas peut-on avoir $G = P'$?
Déterminer toutes les droites affines D , contenues dans P , telles que $D \cap P'$ soit un sous-groupe de P' .

Partie B

Pour chaque point A de P , on note f_A l'application qui au point m , de coordonnées $(x; y)$ associe le point M de coordonnées $(X; Y)$ tel que $M = A \star m$.

Dans cette question et dans la suite du problème, on note $(a; b)$ les coordonnées de A .

1. Donner l'expression analytique de f_A , et caractériser f_A géométriquement.
Quels sont les points invariants de f_A ?
2. Démontrer qu'on a, pour tout $A' \in P$, $f_A \circ f_{A'} = f_{A \star A'}$, où \circ désigne la loi de composition des applications.
Soit $F = \{f_A / A \in P'\}$.
Montrer que l'application $A \mapsto f_A$ est un isomorphisme de (P', \star) sur (F, \circ) . En déduire la structure de F .
3. Montrer que pour tout $A \in P$ on a $f_A(D^0) \subset D^0$. On notera f_A^0 l'application de D^0 dans D^0 qui à un point $m \in D^0$ associe $f_A(m)$.
Montrer que l'application $A \mapsto f_A^0$ est un isomorphisme de (P', \star) sur, un groupe d'applications bijectives de D^0 dans D^0 , qu'on caractérisera et qu'on reconnaîtra.

4. On définit une suite (A_n) de points de P par $A_1 = A$, $A_2 = f_A(A_1)$, ..., $A_n = f_A(A_{n-1})$ pour $n \geq 2$. Déterminer les coordonnées de A_n en fonction de a , b et n (on pourra distinguer les cas $a = 1$, et $a \neq 1$).

Montrer que si on a $|a| < 1$, la suite (A_n) a une limite, qu'on précisera.

Partie C

Pour chaque point A de P (de coordonnées $(a; b)$), on note g_A l'application de P dans P qui au point m de coordonnées $(x; y)$ associe le point M de coordonnées $(X; Y)$ tel que $M = m \star A$.

1. Donner l'expression analytique de g_A . Quels sont ses points invariants?
2. Montrer que si une application affine de P dans P laisse invariants deux points distincts de D^0 , elle laisse invariants tous les points de D^0 .
Déterminer toutes les applications affines de P dans P qui laissent invariants tous les points de D^0 ; y en-a-t-il d'autres que les applications g_A , $A \in P$.
3. Déterminer l'ensemble des points A de P tel que g_A soit involutive.

Partie D

On suppose dans cette question que (\vec{i}, \vec{j}) est une base orthonormée directe de P . A désigne le point de coordonnées $(-1; 1)$, et on pose $g_A = g$.

1. Donner l'expression analytique de g , et caractériser g géométriquement.
2. Quelle est l'équation du transformé (\mathcal{C}_1) par g du cercle (\mathcal{C}) de centre O et de rayon 1?
3. On note $(O, \vec{i}_1, \vec{i}_2)$ le repère orthonormé qui se déduit de $(O; \vec{i}, \vec{j})$ par rotation de centre O et d'angle α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

Déterminer l'équation de (\mathcal{C}_1) dans le repère $(O, \vec{i}_1, \vec{i}_2)$, on notera $(x_1; y_1)$ les coordonnées d'un point dans le nouveau repère.

Quelle relation α doit-il satisfaire pour que le terme en $x_1 y_1$ dans la nouvelle équation de (\mathcal{C}_1) soit nul?

Calculer alors $\cos 2\alpha$ et $\sin 2\alpha$.

4. Reconnaître (\mathcal{C}_1) . Préciser ses éléments de symétrie. Préciser les points d'intersection de (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}_1) .