Baccalauréat C Grenoble juin 1981

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Montrer qu'un entier naturel n est divisible par 42 (42 est écrit dans le système décimal) si, et seulement si, n est divisible par 6 et par 7.
2. Soit n un entier naturel écrit $\overline{3a4b}$ en base huit.
   Écrire en base huit tous les entiers, n, qui sont divisibles par 42.
   Montrer que ce sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique dont on donnera la raison écrite en base huit.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

Soit P un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. À tout point M de coordonnées $(x~;~y)$ on associe le nombre complexe $z = x + \text{i}y$ affixe de M. On désigne par $\overline{z}$ le nombre conjugué de z.

1. Soit f l'application de P dans P qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe
$$z' = \left(1 - \text{i}\sqrt{3}\right)\overline{z} - 2\text{i}.$$
   Préciser la nature de f et ses éléments remarquables.
2. Soit g la symétrie affine orthogonale de P par rapport à la droite Δ d'équation
   $y = x\sqrt{3} - 1$.
   On note $M'' = g(M)$. Calculer les coordonnées $(x''~;~y'')$ de M'' en fonction des coordonnées $(x~;~y)$ de M.
3. Préciser la nature de la transformation $g \circ f$ et ses éléments remarquables.

PROBLÈME **14 POINTS**

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$. On rappelle que $\mathcal{F}$ muni de l'addition des fonctions et de leur multiplication par un nombre réel est un espace vectoriel réel.

Partie A

Soit $\mathcal{E} = \{f \in \mathcal{F} : f''' - 6f'' + 12f' - 8f = \theta\}$ où θ est l'application nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; f', f'', f''' sont les dérivées première, seconde et troisième de f.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ muni de l'addition des fonctions et de leur multiplication par un nombre réel est un espace vectoriel réel.
2. Vérifier que la fonction $f_0~:~x \longmapsto \text{e}^{2x}$ appartient à $\mathcal{E}$ et montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que f appartienne à $\mathcal{E}$ est que la fonction
   $g~:~x \longmapsto \text{e}^{-2x}f(x)$ soit trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifie $g''' = \theta$.
   En déduire la forme générale des fonctions g puis la forme générale des éléments de $\mathcal{E}$.

Partie B

À tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ on associe la fonction numérique

$$f_{a,\,b,\,c} : x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}\left(a + bx + cx^2\right).$$

Soit E l'ensemble de toutes ces fonctions.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$ et qu'il admet pour base $\left(f_0,\ f_1,\ f_2\right)$ où

$$f_0\ :\ x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}, \quad f_0\ :\ x \longmapsto x\mathrm{e}^{2x}, \quad f_0\ :\ x \longmapsto x^2\mathrm{e}^{2x}$$

Donner les coordonnées de $f_{a,\,b,\,c}$ dans cette base.

2. Montrer que la dérivée première, $f'_{a,\,b,\,c}$ de $f_{a,\,b,\,c}$ appartient à E et donner ses coordonnées dans la base $\left(f_0,\ f_1,\ f_2\right)$.

Soit D l'application de E dans E qui à f associe f'. Montrer que D est un endomorphisme bijectif de E et déterminer l'application réciproque D^{-1}. En déduire la primitive de $f_{a,\,b,\,c}$ qui appartient à E.

3. Retrouver l'expression générale des primitives de $f_{a,\,b,\,c}$ en calculant tout d'abord $\displaystyle\int_0^x f_{a,\,b,\,c}(t)\,\mathrm{d}t$ par des intégrations par parties successives.

4. On pose $D^1 = D$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\quad D^{n+1} = D \circ D^n$.

Vérifier que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \left\{\begin{array}{lcl} D^n\left(f_0\right) & = & 2^n f_0\\ D^n\left(f_1\right) & = & n2^{n-1} f_0 + 2^n f_1\\ D^n\left(f_2\right) & = & n(n-1)2^{n-2} f_0 + n2^n f_1 + 2^n f_2 \end{array}\right.$$

Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\forall (a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3$, $f_{a,\,b,\,c}$ admet une dérivée d'ordre n, $f^{(n)}_{a,\,b,\,c}$.

Utiliser ce qui précède pour calculer $f^{(n)}_{a,\,b,\,c}$

Partie C

Soit h la fonction numérique définie par

$$h(x) = \mathrm{e}^{2x}\left(2x^2 - 2x - 1\right).$$

1. Étudier la fonction h et tracer sa courbe représentative dans un plan P rapporté à un repère orthonormé. (On donne $\mathrm{e}^2 \approx 7,389$ et $\mathrm{e}^{-2} \approx 0,135$).

2. Soit D l'ensemble des points M de P dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient $f(x) \leqslant y \leqslant 0$. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de D.