

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Grenoble ∞

EXERCICE 1

4 points

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^6 = -1$ où z est l'inconnue.
2. Mettre le polynôme $x^6 + 1$ sous forme d'un produit de trois polynômes à coefficients réels.

EXERCICE 2

4 points

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \text{Log} \left| \frac{x}{x+1} \right|.$$

1. Étudier f et construire sa représentation graphique (C) dans un repère orthonormé.
2. a. Soit λ un réel tel que $0 < \lambda < 1$. Calculer l'aire géométrique $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$. (On pourra intégrer par parties).
b. Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{A}(\lambda)$.

PROBLÈME

12 points

Soit E un espace vectoriel de dimension 2. On désigne par $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E . On notera Id l'application identique de E , θ l'application nulle de E . Pour tout élément φ de $\mathcal{L}(E)$ on pose $\varphi \circ \varphi = \varphi^2$ et $\varphi + \varphi = 2\varphi$.

Partie A

On étudie dans cette partie les éléments φ de $\mathcal{L}(E)$ tels que

$$(1) \quad (\varphi - \text{Id})^2 = \theta.$$

1. Montrer que $(\varphi - \text{Id})^2 = \theta$ équivaut à $2\varphi - \varphi^2 = \text{Id}$. En déduire que si φ est solution de (1) alors φ est bijectif et préciser φ^{-1} .
2. a. Quelles sont les homothéties vectorielles solutions de (1)?
b. Soit (\vec{i}, \vec{j}) une base de E , φ_1 et φ_2 les endomorphismes de matrices respectives

$$M_1 = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que φ_1 et φ_2 sont solutions de (1).

En déduire qu'il existe un élément Ψ de $\mathcal{L}(E)$ tel que $\Psi \neq \theta$ et $\Psi^2 = \theta$.

3. Soit φ une solution de (1) et λ un réel : démontrer qu'il existe un vecteur \vec{U} non nul tel que $\varphi(\vec{U}) = \lambda\vec{U}$ si, et seulement si, $\lambda = 1$.
4. a. Soit Ψ un élément de $\mathcal{L}(E)$ différent de θ tel que $\Psi^2 = \theta$.
Soit \vec{U}_0 un vecteur de E tel que $\vec{U}_0 \neq \theta$: montrer que $(\Psi(U_0), U_0)$ est une base de E . Donner la matrice de Ψ dans cette base.
- b. En déduire que, pour φ solution de (1) et $\varphi \neq \text{Id}$, il existe une base de E dans laquelle la matrice de φ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5. Soit φ une solution de (1) autre que l'identité.
On appelle F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par φ et Id .
- a. Démontrer que la dimension de F est 2.
- b. Démontrer que F muni de l'addition des applications et de la composition des applications a une structure d'anneau commutatif unitaire.
Déterminer G , l'ensemble des éléments inversibles de F .
Quelle est la structure de (G, \circ) ?

Partie B

On étudie dans cette partie les applications affines du plan affine P associé à E laissant au moins deux points distincts invariants.

On considère dans P , trois points non alignés A, B, C et C' un point quelconque de P .

Soit f l'application affine laissant A et B invariants et transformant C en C' et φ l'endomorphisme associé. ($f(A) = A, f(B) = B, f(C) = C'$).

1. On suppose $C = C'$. Que peut-on dire de f ? Dans la suite du problème on suppose $C \neq C'$.
2. Montrer que la droite AB est invariante point par point par f .
3. On suppose les droites AB et CC' sécantes en O . Soit $(x; y)$ les coordonnées d'un point M de P dans le repère (O, \vec{AB}, \vec{OC}) .
- a. Calculer les coordonnées $(x'; y')$ de $M' = f(M)$.
- b. Quelle est la nature de f si $C' = O$?
- c. Si $C' \neq O$ étudier comment se transforment les droites parallèles aux axes.
4. On suppose que les droites AB et CC' sont parallèles. Soit k tel que $\vec{CC'} = k\vec{AB}$.
- a. Dans le repère $(A, \vec{AB}, \frac{1}{k}\vec{AC})$ exprimer les coordonnées $(x'; y')$ de M' image par f d'un point M de coordonnées $(x; y)$.
Vérifier que $(\varphi - \text{Id})^2 = \theta$.
- b. Démontrer que, pour tout point M de P

$$\overrightarrow{Mf(M)} = y\vec{AB}$$

(y est l'ordonnée de M).

En déduire une construction géométrique de $f(M)$. (On envisagera les cas : CM est parallèle à AB , CM n'est pas parallèle à AB).