

∞ Baccalauréat C Grenoble juin 1983 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

Pour tout nombre complexe z , on note

$$f(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2.$$

1. a. Montrer que : $f(2) = 0$.
- b. Déterminer z_1, z_2, z_3 tels que : pour tout nombre complexe z

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3).$$

2. Pour tout nombre complexe z , on note :

$$f'(z) = (z - z_1)(z - z_2) + (z - z_2)(z - z_3) + (z - z_3)(z - z_1).$$

Soient M_1, M_2, M_3 les images des nombres complexes z_1, z_2, z_3 dans le plan complexe.

- a. Soit N un point d'affixe z . Si N est différent de M_1 , de M_2 , de M_3 montrer que l'affixe du vecteur :

$$\frac{1}{\|\overrightarrow{NM_1}\|^2} \cdot \overrightarrow{NM_1} + \frac{1}{\|\overrightarrow{NM_2}\|^2} \cdot \overrightarrow{NM_2} + \frac{1}{\|\overrightarrow{NM_3}\|^2} \cdot \overrightarrow{NM_3}$$

est le conjugué de $\frac{f'(z)}{f(z)}$;

- b. Calculer $f'(1)$. Soit N_1 le point d'affixe 1.
Expliciter les coefficients α, β et φ réels de somme égale à 1 qui permettent d'exprimer N_1 comme barycentre des points M_1, M_2 et M_3 .

EXERCICE 2

3 POINTS

\mathcal{E} est un espace, affine associé à un espace vectoriel E . On désigne par $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de \mathcal{E} .

Soit f l'application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{E} qui à tout point M de coordonnées $(x; y; z)$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y'; z')$ défini par :

$$\begin{cases} x' &= -y + z + 3 \\ y' &= -x + z + 3 \\ z' &= -x - y + 2z + 3 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une projection dont on précisera les éléments caractéristiques.
2. Soit \mathcal{P} le plan affine d'équation $x + y - 2z - 3 = 0$.
Quelle est la dimension de l'image de \mathcal{P} par f . En préciser un repère cartésien.

PROBLÈME

13 POINTS

Partie A

Soit f la fonction de $\mathbb{R} - \{-2\}$ vers \mathbb{R} définie par

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{2 + x}$$

1. Pour tout x réel différent de -2 , vérifier l'égalité

$$f(x) = -x + 2 - \frac{3}{x + 2}.$$

2. Étudier les variations de f , et tracer la courbe représentative \mathcal{C} dans le plan rapporté à un repère orthonormé (l'unité de longueur choisie étant 1 cm, figure n° 1).
3. Démontrer que la courbe \mathcal{C} admet un centre de symétrie.
4. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe \mathcal{C} , son asymptote oblique et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$.

Partie B

Soit φ la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par

$$\varphi(t) = \frac{1 - \sin^2 t}{2 + \sin t}.$$

1. Pour tout t réel, montrer que $\varphi(\pi - t) = \varphi(t)$.
Expliquer comment l'étude des variations de la restriction de φ à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ permet de construire la courbe représentative de φ .
2. Le but de cette question est de prouver que l'équation $\varphi'(t) = 0$ admet une solution, notée α , dans l'intervalle ouvert $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ (l'ordre des questions n'est pas imposé).
- a. Montrer que la dérivée f' de f est strictement décroissante sur $[-1; 1]$. Quelle est l'image de $[-1; 1]$ par f' ?
- b. Soit φ' la dérivée de φ . Pour tout t réel, prouver l'égalité

$$\varphi'(t) = f'(\sin t) \cos t.$$

Prouver l'existence et l'unicité de α .

Calculer la valeur exacte de $\varphi(\alpha)$.

3. a. Calculer les valeurs exactes de $\varphi(0)$, $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\varphi'(0)$.
- b. Étudier les variations de la restriction de φ à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
Tracer la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (l'unité de longueur choisie étant 10 cm, figure n° 2).

4. En utilisant la fonction h de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par

$$h(t) = \varphi(t) - t$$

prouver que l'équation $\varphi(t) = t$ admet une solution unique, notée x_0 , dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Montrer que x_0 est la seule solution de l'équation $\varphi(t) = t$ dans \mathbb{R} .

Résoudre graphiquement l'équation $\varphi(t) = t$ à l'aide de la figure n° 2.

Partie C

Soit la suite u définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n).$$

1. Pour tout n entier naturel, on considère les points M_n et N_n ayant respectivement pour coordonnées (u_n, u_{n+1}) et (u_{n+1}, u_{n+1}) .

Sur quelles courbes se trouvent respectivement les points M_n et N_n ? Sur la figure n° 2, placer les points

$$M_0, N_0, M_1, N_1, M_2, N_2 \text{ et } M_3.$$

À l'aide du dessin, ranger par ordre croissant les nombres

$$u_0, u_1, u_2, u_3 \quad \text{et} \quad x_0$$

2. Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$$

3. Pour tout n entier naturel, prouver l'égalité

$$u_{n+1} - x_0 = \int_{x_0}^{u_n} \varphi'(t) dt.$$

En déduire que :

a. Les nombres $u_{n+1} - x_0$ et $u_n - x_0$ sont de signes contraires.

b. On a la majoration

$$|u_{n+1} - x_0| = \frac{2}{3} |u_n - x_0|.$$

4. Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - x_0| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - x_0|.$$

En déduire que la suite u converge vers x_0 .