

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Grenoble septembre 1969 ∞

EXERCICE 1

On donne trois points, A, B et C, deux à deux distincts et non alignés, ainsi que deux nombres réels,  $\alpha$  et  $\beta$ , tels que  $\alpha + \beta = 0$ .

On désigne par  $C'$  le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs  $\alpha$  et  $\beta$  et par  $B'$  le barycentre des points C et A affectés des coefficients respectifs  $\alpha$  et  $\beta$ .

1. Exprimer :

$\overrightarrow{AC'}$  en fonction de  $\alpha, \beta$  et  $\overrightarrow{AB}$ ,

$\overrightarrow{AB'}$  en fonction de  $\alpha, \beta$  et  $\overrightarrow{AC}$ ,

$\overrightarrow{AG}$  en fonction de  $\alpha, \beta, \overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  (G désignant le centre de gravité du triangle  $AB'C'$ ).

2. On considère les points  $B_1$  et  $C_1$  définis par les relations

$$\overrightarrow{AB_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

Montrer que G décrit la droite  $B_1C_1$  lorsque  $\alpha$  et  $\beta$  varient de façon que  $\alpha + \beta = 1$

EXERCICE 2

Soit U l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1.

1. Comparer l'inverse et le conjugué d'un élément de U.

2. Soit  $z_1$  et  $z_2$  deux éléments de U tels que  $z_1 z_2 \neq -1$ .

Montrer que  $Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$  est un nombre, réel.

3. Exprimer Z en fonction des arguments,  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , de  $z_1$  et  $z_2$ .

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes  $x'Ox$ ,  $y'Oy$ ;  $a$  désigne un nombre donné strictement positif. La droite  $(\Delta)$  d'équation  $x = a$  coupe  $x'Ox$  en A.

Soit  $m(x; y)$  un point du plan n'appartenant pas à  $y'Oy$ ; la droite Om coupe  $(\Delta)$  en I.

On considère la transformation T dans laquelle le point m a pour image le point  $M(X; Y)$  de la droite Om défini par la relation

$$\overline{Om} \cdot \overline{OM} = (OI)^2.$$

Partie A

1. Déterminer les points doubles de T.

2. Déterminer des droites invariantes par  $T$ .
3. Quelle est l'image d'une parallèle à  $y'y$ ?
4. Montrer que  $X = \frac{a^2}{x}$  et  $Y = \frac{a^2 y}{x^2}$ .  
Exprimer  $x$  et  $y$  en fonction de  $X, Y$  et  $a$ .

**Partie B**

On considère une droite  $(d)$  non parallèle à  $y'y$  et ne passant pas par  $O$ .

1. Montrer que l'image de  $(d)$  est une parabole,  $(P)$ , dont la tangente en  $O$  est parallèle à  $(d)$ .
2.  $(d)$  et  $(d')$  étant deux droites symétriques par rapport à  $y'y$ , que peut-on dire de leurs images,  $(P)$  et  $(P')$ ?  
 $(d)$  et  $(d')$  étant deux droites symétriques par rapport à  $O$ , que peut-on dire de leurs images,  $(P)$  et  $(P')$ ?
3.  $(d)$  se déplaçant en restant parallèle à la droite d'équation  $y = x$ , déterminer l'ensemble des sommets  $S$  et l'ensemble des foyers  $F$  des paraboles  $(P)$  correspondantes.

**Partie C**

Soit  $(C)$  le demi-cercle de diamètre  $OA$  situé dans le demi-plan  $y > 0$ . On désigne par  $(\Gamma)$  l'image de  $(C)$  par  $T$ .

1. Déterminer l'équation,  $Y = f(X)$ , de  $(\Gamma)$ .  
Étudier les variations de  $Y$ .  
Soit  $M_0$  le point de  $(\Gamma)$  d'abscisse  $2a$ . Que peut-on dire de la droite  $AM_0$ ? Tracer  $(\Gamma)$ .
2. On pose  $\widehat{AOm} = \alpha \quad \left(0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ .  
Évaluer, en fonction de  $\alpha$ ,  $u = \text{tg } xAM$ .  
Quel est le minimum de  $u$ ? Quelles sont les positions correspondantes de  $m$  et  $M$ ?  
Évaluer  $\text{tg } \widehat{MAM}$  en fonction de  $t = \text{tg } \alpha$ .