

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Grenoble septembre 1971 ∞

EXERCICE 1

On considère la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par

$$f(x) = \text{Log} \frac{x^2 - 1}{x}.$$

La notation Log désigne le logarithme népérien.

1. Déterminer le domaine de définition de cette fonction.
2. Étudier les variations de cette fonction.
3. En remarquant que  $\frac{x^2 - 1}{x} = x \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$  chercher la limite de  $\frac{f(x)}{x}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

Tracer la courbe représentative de la fonction étudiée.

EXERCICE 2

On considère l'équation différentielle (E), vérifiée par la fonction  $y$  de la variable réelle  $x$ , suivante :

$$(E) \quad y'' + 4y = 4x.$$

1. Montrer que  $y = x$  est une solution particulière de (E).
2. On pose  $y = x + z$ . Former l'équation différentielle  $(E_1)$  à laquelle satisfait  $z$ .  
Déterminer les solutions de  $(E_1)$  et en déduire les solutions de (E).
3. Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant simultanément

$$y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 3.$$

PROBLÈME

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'axes  $x'Ox$  et  $y'Oy$ . On désigne par  $(\Pi)$  le plan (P) privé du point O, par A le point de coordonnées (2; 0). Soit  $T$  la transformation ponctuelle qui, au point  $M$  de  $(\Pi)$ , fait correspondre le point  $M'$  défini de la façon suivante :

la similitude directe de centre O qui transforme  $M$  en A, transforme A en  $M'$ .

Partie A

1. Montrer que  $OM \cdot OM' = 4$  et que

$$\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) + \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM'}\right) = 0 \pmod{2\pi}.$$

En déduire que les affixes  $z$  de  $M$  et  $z'$  de  $M'$  sont liées par la relation  $zz' = 4$ .

2. Calculer les coordonnées  $(x'; y')$  de  $M'$  en fonction des coordonnées  $(x; y)$  de  $M$ .
3. Montrer que  $T$  est une bijection involutive de  $(\Pi)$  sur  $(\Pi)$ . Déterminer les points doubles de  $T$ .
4. Montrer que  $T$  est le produit commutatif de la symétrie par rapport à  $x'Ox$  et d'une inversion, que l'on déterminera.

### Partie B

1. Déterminer l'ensemble des points  $M$  tels que le vecteur  $\overrightarrow{MM'}$  soit colinéaire à  $\vec{i}$ , d'une part, et à  $\vec{j}$ , d'autre part.
2. Déterminer les points  $M$ , tels que le quadrilatère  $OMAM'$  soit un parallélogramme.
3. Soit  $R$  un point de coordonnées  $(0; \lambda)$ , où  $\lambda$  est un nombre réel donné.  
Déterminer l'ensemble des points  $M$  tels que  $M, M'$  et  $R$  soient alignés.

### Partie C

Soit  $(C)$  un cercle passant par  $O$ ; on désigne par  $(a; b)$  les coordonnées de son centre  $\omega$ , par  $(C')$  son transformé par  $T$ .

1. Quelle est la nature de  $(C')$ ? Écrire les équations de  $(C)$  et de  $(C')$ .
2. Déterminer les points  $M$ , tels que  $(C)$  soit le cercle circonscrit au triangle  $OMM'$ .  
Discuter en fonction de la position de  $\omega$  dans  $(P)$ .

### Partie D

On suppose qu'à la date  $t$ , les coordonnées de  $M$  sont données par les formules suivantes :

$$x = \frac{4 \cos^2 t}{1 + \cos^2 2t} \quad \text{et} \quad y = \frac{4 \sin^2 t}{1 + \cos^2 2t}.$$

Calculer les coordonnées de  $M'$  en fonction de  $t$ .

Déterminer la trajectoire et la loi horaire du point  $M'$ . En déduire la trajectoire de  $M$ .