∽ Baccalauréat C Grenoble septembre 1972 ∾

EXERCICE 1

Dans un plan affine euclidien (P) muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, on considère la courbe (Γ) d'équation

$$y^2 = 3x^2 - 6x - 1.$$

1. Déterminer la nature de la courbe (Γ), ses éléments de symétrie, ses asymptotes. Construire (Γ).
2. On note
   z le nombre complexe de partie réelle x, de partie imaginaire y,
   $|z|$ le module de z,
   $\overline{z}$ le complexe conjugué de z.
   Montrer que (Γ) est l'ensemble des points M de (P) dont l'affixe z vérifie

$$\left|z + 2\overline{z} + 1\right| = \sqrt{3}\left|z + \overline{z}\right|$$

EXERCICE 2

Étant donné un plan affine (P), rapporté à un repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, on considère l'application f de (P) dans (P) qui, à un point M de coordonnées $(x~;~y)$ fait correspondre le point M' de coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & y + 1 \\ y' & = & 4x + 2. \end{array}\right.$$

1. Vérifier que f est une application affine. Montrer que f est une application bijective.
   Montrer que f admet un point invariant, et un seul, que l'on déterminera.
2. Démontrer qu'il existe deux droites (D_1) et (D_2) globalement invariantes par f et donner leurs équations.

PROBLÈME

Log x désigne le logarithme népérien du nombre réel positif x.
On considère la fonction numérique f, de la variable réelle, définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(x) & = & x\mathrm{Log}\left(x^2\right) - 2x, \quad \text{si } x \neq 0, \\ f(0) & = & 0. \end{array}\right.$$

On désigne par (C) sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $\overrightarrow{x'\mathrm{O}x}$, $\overrightarrow{y'\mathrm{O}y}$.

1. Étudier la continuité de f. Montrer que f est une fonction impaire. Étudier les variations de f.

Étudier les limites de $\dfrac{f(x)}{x}$.

a. quand x tend vers zéro,

b. quand x tend vers $+\infty$.

(C) coupe $x'\text{O}x$ en un point A d'abscisse strictement positive ; établir l'équation de la tangente en A à (C).

Construire (C).

2. Soit M un point de (C) d'abscisse α (α non nul).

a. Déterminer l'équation de la tangente (D) à (C) en M. (D) coupe $y'\text{O}y$ en P, point que l'on précisera ; en déduire un tracé simple de (D) connaissant le point de contact M.

b. Montrer qu'il existe, en général, sur (C) deux points M_1 et M_2 en lesquels la tangente à (C) est perpendiculaire à (D) ; exprimer les abscisses de M_1 et M_2, en fonction de α.

c. En utilisant (C), dénombrer, suivant la valeur du paramètre réel m, les racines réelles de l'équation $x^2 = \text{e}^{2\frac{m}{x}}$.

3. **a.** En utilisant une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction f.

b. Soit λ un nombre réel tel que $0 < \lambda < \text{e}$.

Calculer l'aire $S(\lambda)$ du domaine plan limité par (C), $x'\text{O}x$ et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = \text{e}$.

Déterminer la limite de $S(\lambda)$ quand λ tend vers zéro par valeurs positives.