Baccalauréat C Grenoble septembre 1976

EXERCICE 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - \left[2 + \mathrm{i}\left(m - \sqrt{3}\right)\right] z + 1 + m\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(m - \sqrt{3}\right) \qquad (1)$$

où m est un paramètre réel.

2. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\, \overrightarrow{u},\, \overrightarrow{v}\right)$ on désigne par M' et M'' les points dont les affixes z' et z'' sont les solutions de l'équation (1).
   a. Déterminer m pour que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{O}M'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}M''}$ soient orthogonaux.
   b. Déterminer m pour que la distance de M' à M'' soit égale à un nombre réel positif ou nul ℓ donné.

EXERCICE 2

Un sac renferme 8 jetons de forme et de matière identiques dont 3 sont blancs et 5 sont noirs. On extrait du sac, au hasard, un par un, 4 jetons que l'on dispose, dans l'ordre où ils sont tirés, dans quatre cases numérotées de 1 à 4. (Le premier jeton est placé dans la case numéro 1, le deuxième dans la case numéro 2, etc.)

1. On veut calculer la probabilité pour que l'on ait :
   A : « Les 4 cases sont occupées par des jetons noirs ».
   B : « Les cases 1 et 3 sont occupées par des jetons blancs, les cases 2 et 4 par des jetons noirs ».
   Donner un espace probabilité fini tel que A et B soient des évènements et calculer leurs probabilités respectives.
2. Sur cet espace probabilisé, on définit la variable aléatoire X qui prend pour valeur le plus petit des numéros de cases contenant un jeton noir.
   Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et sa variance.

PROBLÈME

Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante

Étant donné deux réels a et b, on désigne par $f_{a,\,b}$ la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f_{a,\,b}(x) = a\mathrm{e}^{x} + b\mathrm{e}^{-x}.$$

Partie A

On étudie dans cette partie le cas où $a = 1$ et $b = -3$; on désigne par g la fonction $f_{1,\,-3}$.

1. Étudier la fonction g et la représenter graphiquement dans un repère orthonormé.

2. Montrer que g admet une fonction réciproque que l'on explicitera et que l'on représentera dans le même repère.

Partie B

Dans un plan affine euclidien, on désigne par x et y les coordonnées d'un point M relativement à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. On suppose x et y fonctions du temps t qui décrit $\mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \mathrm{e}^t + 3\mathrm{e}^{-t} \\ y & = & \mathrm{e}^t - 3\mathrm{e}^{-t} \end{array}\right.$$

1. Calculer les composantes du vecteur-accélération du point M à l'instant t. Que remarque-t-on ?
2. Déterminer la trajectoire du point M, en préciser la nature géométrique et la tracer.
3. Pour quelles valeurs de t le mouvement de M est-il accéléré ? retardé ? Préciser les portions de trajectoire correspondantes.

Partie C

On désigne par E l'ensemble des fonctions $f_{a,\,b}$ où $(a,\,b)$ décrit $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans lui-même muni de l'addition et de la multiplication par un réel.
2. On désigne par u la fonction $f_{1,\,0}$ et par v la fonction $f_{0,\,1}$. Montrer que $(u,\,v)$ est une base de E.
3. Étant donné un réel p, on désigne par $h_{a,\,b}$ la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

   $$h_{a,\,b}(x) = f_{a,\,b}(x+p).$$

   Vérifier que $h_{a,\,b}$ est un élément de E.
4. Soit l'application $\begin{array}{lccc} \varphi_p : & E & \to & E \\ & f_{a,\,b} & \longmapsto & h_{a,\,b} \end{array}$
   - **a.** Montrer que φ_p est linéaire. Quelle est sa matrice M relativement à la base $(u,\,v)$? φ_p est-elle bijective ?
   - **b.** Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications φ_p où p décrit $\mathbb{R}$.
     Montrer que $\varphi_q \circ \varphi_p$ est un élément de $\mathscr{F}$. En déduire la structure de $\mathscr{F}$ muni de la loi de composition des applications.