

## ♣ Baccalauréat C groupe 3<sup>1</sup> septembre 1984 ♣

### EXERCICE 1

### EXERCICE 3

Le plan euclidien est rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Pour les représentations graphiques, on adoptera pour unité de longueur 2 cm.

#### Partie A

1. Soit  $(H)$  l'hyperbole d'équation cartésienne

$$y^2 - 4x^2 = 4.$$

Représenter graphiquement  $(H)$  en précisant les coordonnées de ses sommets et des équations cartésiennes de ses asymptotes.

Déterminer l'excentricité et les coordonnées des foyers de  $(H)$ .

2. Soient  $F$  et  $F'$  les points de coordonnées respectives  $(0; \sqrt{3})$  et  $(0; -\sqrt{3})$ .
3. Déterminer une équation cartésienne de l'ellipse  $(E)$  de foyers  $F$  et  $F'$  et d'excentricité  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .  
Représenter graphiquement  $(E)$  en précisant les coordonnées de ses sommets.

#### Partie B

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par

$$\begin{cases} f(x) = -2\sqrt{1-x}|x| & \text{pour } x \leq 1 \\ f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) & \text{pour } x > 1 \end{cases}$$

1. Vérifier que les formules précédentes définissent  $f(x)$  pour tout réel  $x$ . La fonction  $f$  est-elle continue?
2. **a.** Démontrer que  $f$  est dérivable sur chacun des intervalles  $]-\infty; 0[$ ,  $]0; 1[$ ,  $]1; +\infty[$  et calculer  $f'(x)$ .
- b.** Démontrer que  $f$  est dérivable en 0 en préciser la valeur de  $f'(0)$  : on pourra utiliser le développement limité à l'ordre 1 de la fonction  $t \mapsto \sqrt{1+t}$  au voisinage de 0.
- c.** Étudier le comportement du rapport  $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  quand  $x$  tend vers 1 par valeurs supérieures et par valeurs inférieures. Pour  $x > 1$ , on pourra poser  $x - 1 = u$  et utiliser le développement limité d'ordre 1 de la fonction  $t \mapsto \ln(1+t)$  au voisinage de 0 ou le comportement de la fonction  $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$  au voisinage de 0.

---

1. Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg

3. Démontrer que la courbe représentative de la restriction de  $f$  à l'intervalle  $] -\infty ; 1]$  est un sous-ensemble de  $(E) \cup (H)$ . (( $E$ ) et ( $H$ ) étant les coniques considérées dans la partie A.)
- Étudier les variations de  $f$  et tracer la courbe ( $C$ ) représentative de  $f$ .
- Préciser les tangentes à la courbe ( $C$ ) aux points d'intersection avec les axes de coordonnées.

### Partie C

1. Démontrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ . Tracer sur le même graphique que ( $C$ ) la courbe ( $C'$ ) représentative de  $f^{-1}$ , fonction réciproque de  $f$ .
2. Si  $x > 1$ , démontrer l'égalité :  $f^{-1}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .
3. Si  $a \geq 0$ , calculer  $\int_0^a f^{-1}(x) dx$ .
- En déduire, pour tout  $t > 1$ , la valeur  $S(t)$  de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe ( $C$ ), l'axe  $x'Ox$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = t$ .