

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Grenoble juin 1969 ∞

EXERCICE 1

On considère l'équation

$$(E) \quad az^2 + b|z|^2 + ic = 0,$$

dans laquelle  $a, b$  et  $c$  sont des nombres réels et  $z$  un nombre complexe de module  $|z|$ .

1. Quelles conditions doivent vérifier  $a, b$  et  $c$  pour que  $z = 3 + 2i$  soit une solution de (E) ?
2. Calculer  $a, b$  et  $c$ , sachant que  $a, b, c$  appartiennent à l'ensemble,  $\mathbb{Z}$ , des entiers relatifs et que  $0 < a < 15$ .

EXERCICE 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes  $x'Ox, y'Oy$ .

Tracer le graphe, (C), de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = x + 1 + \frac{4}{|x-1|}.$$

Calculer l'aire de la surface plane comprise entre la courbe (C), son asymptote oblique et les droites d'équations

$$x = 1 + e \quad \text{et} \quad x = 1 + e^2.$$

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes  $x'Ox, y'Oy$ . Soit  $T$  la transformation qui, à un point  $M$ , fait correspondre le point  $P$  de la perpendiculaire en  $M$  à  $OM$  ayant même projection sur l'axe  $x'x$  que le milieu de  $OM$ .  $P$  sera dit « l'image » de  $M$  par  $T$ .

1. Tous les points du plan ont-ils une image par  $T$ ?  $M(x, y)$  étant tel que  $P$  existe, montrer que les coordonnées,  $X$  et  $Y$ , de  $P$  sont données par les formules

$$X = \frac{x}{2} \quad \text{et} \quad Y = \frac{x^2 + 2y^2}{2y}.$$

Déterminer l'ensemble des points doubles de  $T$ .

2. On donne les coordonnées  $X$  et  $Y$  de  $P$ . Montrer, par le calcul, que  $P$  n'est l'image par  $T$  d'un point  $M$  que si  $P$  appartient à une région, (R), du plan, limitée par deux droites, (D) et (D'). Retrouver géométriquement le résultat précédent. La transformation  $T$  est-elle injective?
3. a. Quelle est l'image par  $T$  de la droite d'équation  $x = h$  ( $h$  constante donnée)?

**b.** Quelle est l'image par  $T$  de la droite d'équation  $y = k$  ( $k$  constante donnée,  $k \neq 0$ ) ?  
Montrer que la courbe ainsi obtenue est tangente à (D) et à (D').

**4.** Soit  $(D_m)$  la droite d'équation  $y = mx$  ( $m$  constante donnée, non nulle).

Déterminer analytiquement et géométriquement l'image par  $T$  de la droite  $(D_m)$ .

Montrer que, si deux droites,  $(D_{m_1})$  et  $(D_{m_2})$ , ont la même image par  $T$ , ces droites sont conjuguées harmoniques par rapport à deux droites fixes.

**5.** Soit  $(C)$  le cercle ayant pour équation

$$x^2 + y^2 - 2by = 0 \quad (b, \text{ constante donnée, } b \neq 0).$$

Montrer géométriquement que, pour les points de  $(C)$ ,  $T$  est une transformation classique.

En déduire l'image,  $(C')$ , de  $(C)$  par  $T$ . Montrer que  $(C')$  est tangente aux droites (D) et (D').

**6.** Soit  $(E)$  la conique d'équation

$$x^2 + 2y^2 - 2dy = 0 \quad (d, \text{ constante donnée}).$$

Déterminer le centre, les axes et les foyers de  $(E)$ .

Déterminer l'image de  $(E)$  par  $T$ .

$t$  désignant le temps, montrer que le point  $M$ , de coordonnées.

$$x = \frac{d\sqrt{2}}{2} \sin t \quad \text{et} \quad y = \frac{d}{2}(1 + \cos t)$$

appartient à  $(E)$ .

Déterminer l'hodographe du mouvement de  $M$  par rapport à O. Quelle est la nature du mouvement de  $P$  ?