

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Groupe 1 septembre 1984 ∞

EXERCICE 1

5 points

On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x - x \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1.  $f$  est-elle continue en 0?  
 $f$  est-elle dérivable en 0?
2. Étudier les variations de  $f$  et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé (on prendra un centimètre comme unité).

EXERCICE 2

5 points

Une suite est définie par :

$$u_0 = 1; \quad u_1 = 5,5; \quad u_{n+2} - u_{n+1} + 0,25u_n = 0.$$

1. Donner l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
2. Déterminer un rang  $n_0$  tel que pour tout  $n > n_0$  on ait  $u_n < 10^{-6}$ .

PROBLÈME

5 points

On considère dans le plan affine euclidien orienté un triangle  $ABC$ . On désigne suivant une habitude ancienne par  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  les mesures des angles géométriques du triangle.

$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  sont donc trois réels positifs tels que  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$ .

Le triangle  $ABC$  est direct, c'est à dire que les angles orientés  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}), (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$  ont leurs mesures principales respectivement égales à  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ .

On se propose d'étudier l'existence d'un point  $M$ , intérieur strictement au triangle  $ABC$ , tel que les droites  $(MA), (MB), (MC)$  possède la propriété suivante :

les angles orientés des couples de droites  $(AB, AM), (BC, BM), (CA, CM)$  ont la même mesure principale notée  $\alpha, \alpha > 0$ .

Partie A

1. Montrer que si  $M$  existe, alors  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$ .  
Montrer que le point  $M$  est sur le cercle tangent à  $(BC)$  en  $B$  et passant par  $A$ . En déduire une construction de  $M$ .
2. Dédire des relations métriques (proportionnalité des côtés et des sinus) dans les triangles  $ABM, BMC, CMA$ , la relation :

$$\sin^3 \alpha = \sin(\hat{A} - \alpha) \sin(\hat{B} - \alpha) \sin(\hat{C} - \alpha).$$

3. Calculer  $\alpha$  lorsque le triangle  $ABC$  est équilatéral. Calculer  $\cot \alpha$  (ou  $\tan \alpha$ ) lorsque le triangle  $ABC$  est isocèle et rectangle, et donner une valeur approchée de  $\alpha$ .

### Partie B

Étant donné un réel  $\alpha, \alpha \in ]0; \frac{\pi}{3}[$ , on cherche à quelle condition on peut lui associer un triangle  $ABC$  et un point  $M$  correspondant.

1. Démontrer que si un triangle  $ABC$  et un point  $M$  conviennent, alors le triangle  $A'B'C'$  et tout point  $M'$  déduits de la figure  $ABCM$  par une similitude directe conviennent aussi.
2. On reprend la relation du A 2. et on pose :

$$a = \hat{A} - \alpha, b = \hat{B} - \alpha, c = \hat{C} - \alpha \text{ avec } a + b + c = \pi - 3\alpha.$$

La relation du 2. s'écrit alors :

$$\sin^3 \alpha = \sin a \cdot \sin b \cdot \sin c = \frac{1}{2} \sin c [\cos(3\alpha + c) - \cos(2b + c + 3\alpha)].$$

Si  $\alpha$  et  $c$  sont donnés, cette relation permet de calculer  $b$  et  $\hat{B}$ .

Lorsque  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ , montrer que  $b$  est donné par :

$$\sin(2b + c) = \sin c + \frac{1}{4 \sin c}.$$

Déterminer les valeurs de  $c$  pour lesquelles le second membre est inférieur ou égal à 1.

Montrer qu'il n'y a qu'un seul triangle admettant un angle  $\alpha$  égal à  $\frac{\pi}{6}$  et indiquer lequel (à une similitude près).