

∞ Baccalauréat C Groupe 1¹ juin 1968 ∞

SÉRIE C

Exercice 1

Étudier les variations de la fonction f telle que

$$f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x}).$$

Le symbole \ln désigne le logarithme népérien et e la base de ce système de logarithmes.
Tracer la représentation graphique, (Γ) , de f ; démontrer que (Γ) possède un axe de symétrie.

Exercice 2

L'arc x étant évalué en radians, résoudre l'équation :

$$\sin \frac{x}{3} + 2 \cos \frac{x}{3} + 1,5 = 0,$$

avec l'approximation permise par les tables. (Le candidat indiquera la nature de la table dont il aura fait usage.)

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé dont les axes sont Ox, Oy .

Soit la droite Δ ($y = h$), qui coupe Oy au point H .

Un cercle C tangent en O à Oy rencontre (Γ) en deux points, E et E' . Soit (ω) le cercle de diamètre EE' , de centre ω , dans le plan xOy .

A.

1. Trouver l'équation du cercle (ω) ; on désignera par λ l'abscisse de ω .
2. La perpendiculaire en ω au plan xOy rencontre la sphère (Ω) de grand cercle (ω) en deux points, dont on demande le lieu géométrique :
 - a. quand λ varie seul;
 - b. quand λ et h varient simultanément.

B.

1. Soit G et G' les points du cercle (ω) situés sur le diamètre parallèle à Oy . Lorsque λ varie, démontrer que G et G' décrivent une hyperbole, dont la position dépend de h , soit K_h .

Trouver, quand h varie, le lieu des sommets et le lieu des foyers des hyperboles K_h ; quelle propriété possède l'ensemble des hyperboles K_h ?

1. Le Groupe 1 comprend les pays suivants : Algérie, Iles Comores, Cameroun sud, Italie, Turquie. Côte française des Somalis, Égypte, Éthiopie, Syrie, Liban, Grèce, Tunisie, Espagne et Portugal.

2. On donne un point $M(x_0 ; y_0)$ de K_h ; trouver, en fonction de x_0 et y_0 , le coefficient directeur de la tangente en M à K_h .

Trouver le point T où cette tangente rencontre Oy ; démontrer que, si N est la projection orthogonale de M sur Oy ,

$$\overline{HT} \cdot \overline{HN} = -h^2$$

Interpréter géométriquement ce résultat. Quelles sont les tangentes à K_h menées par O?

C.

1. Où faut-il placer le point $P(\alpha ; \beta)$ dans le plan pour qu'il passe par ce point au moins une hyperbole K_h ? Discuter.
2. On place P de façon qu'il passe en ce point deux courbes K_h distinctes; évaluer l'angle aigu θ sous lequel se coupent ces deux courbes; démontrer que θ ne dépend que du rapport $\mu = \frac{\beta}{\alpha}$ et étudier les variations de θ avec μ ; quel est le plus grand angle sous lequel peuvent se couper deux courbes K_h ?

D.

Trouver les coordonnées des points communs aux deux courbes K_h et $K_{h'}$. Tracer sur la même figure les courbes K_1 (pour $h = 1$) et K_2 (pour $h' = 2$).

La première bissectrice ($y = x$) rencontre respectivement K_1 et K_2 aux points S_1 et S_2 ; les arcs de K_1 et de K_2 passant respectivement par S_1 et S_2 se rencontrent au point Q; évaluer l'aire limitée par le segment S_1S_2 et les arcs QS_1 et QS_2 de K_1 et K_2 . [On prendra pour nouveaux axes (OX, OY) les axes déduits des anciens (Ox, Oy) par une rotation de $\frac{\pi}{4}$ autour du point O.