

∞ **Baccalauréat Groupe I septembre 1964** ∞
mathématiques élémentaires¹

EXERCICE 1

On donne un repère orthonormé xOy ; l'unité de longueur est 2 cm.

1. Reconnaître géométriquement et construire la courbe d'équation

$$y = \sqrt{x \cdot |x - 1|},$$

où $|x - 1|$ représente la valeur absolue du nombre $x - 1$.

2. Soit m un nombre positif donné; discuter, suivant les valeurs de m , le nombre des racines réelles de l'équation

$$\sqrt{x \cdot |x - 1|} - m = 0.$$

Résoudre cette équation pour

$$m = \frac{1}{2}.$$

EXERCICE 2

On donne un cercle Γ , de centre O et de rayon R , ainsi qu'un point fixe, G , tel que

$$OG = kR, \quad k \text{ donné, } 0 < k < \frac{1}{3}.$$

1. On appelle T tout triangle ABC inscrit dans Γ et ayant G pour centre de gravité.
- Construire le triangle T lorsqu'on en donne un sommet A .
 - Préciser, lorsque A décrit Γ , le lieu γ du milieu A' de BC et sa position par rapport à Γ .
 - Montrer que tous les triangles T ont le même orthocentre H et qu'ils ont leurs angles tous aigus.
2. On appelle t tout triangle ABC inscrit dans Γ ; son centre de gravité, g , peut varier alors avec t et n'est plus, d'ordinaire, G .
- Établir les relations

$$3Og^2 + gA^2 + gB^2 + gC^2 = 3R^2,$$

$$BC^2 + CA^2 + AB^2 = 9(R^2 - Og^2).$$

1. Algérie, Tunisie, Cameroun, Togo, Gabon, Tchad, Congo, Athènes, Rome, Espagne, Portugal, Tel-Aviv, Beyrouth, etc.

- b. On désigne, dans la suite, par A, B, C les mesures des angles du triangle ABC. Déduire des relations précédentes quelle condition nécessaire et suffisante doit remplir

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$$

pour que le triangle t soit égal à un triangle T.

3. Dans un triangle t , on donne l'angle A ($0 < A < \frac{\pi}{2}$) et l'on suppose $B \leq C$.
- a. B peut alors varier sur un intervalle \mathcal{J} , dont on précisera les bornes en fonction de A.
Montrer que le triangle t est égal à un triangle T si, et seulement si, l'angle B appartient à l'intervalle \mathcal{J} et satisfait à la condition

$$1 + \sin^2 A - \cos A \cos(2B + A) = \frac{9}{4} (1 - k^2).$$

- b. Étudier la variation de la fonction y de la variable x définie par

$$y = 1 + \sin^2 A - \cos A \cos(2x + A),$$

lorsque x appartient à l'intervalle \mathcal{J} .

En déduire que les triangles T ont leurs trois angles compris entre deux valeurs, dont on déterminera les cosinus en fonction de k .

À quels triangles T correspondent les valeurs extrémales?