Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Groupe I[1] septembre 1969 ∽

EXERCICE 1

Deux entiers naturels a et b sont tels que $ab \equiv 1 \pmod 6$.
Montrer que a et b vérifient l'un ou l'autre des deux systèmes de congruences (mod 6) suivants :

— soit $a \equiv 1$ et $b \equiv 1$,

— soit $a \equiv 5$ et $b \equiv 5$.

EXERCICE 2

La notation Log désigne les logarithmes népériens, e est la base de ces logarithmes.

1. Étudier, dans son intervalle de définition, la fonction f définie par

$$f(x) = \text{Log}\frac{\text{e}^x - \text{e}^{-x}}{2}.$$

2. Construire la courbe représentative, (C), rapportée à un repère orthonormé.
   Montrer que la droite (D) d'équation

$$y = x - \text{Log}\,2$$

   est asymptote à (C) et préciser la position relative de (C) et (D).
3. Calculer avec une erreur absolue inférieure à 0,000 1 l'abscisse du point où (C) coupe l'axe des abscisses et la pente de la tangente en ce point.

PROBLÈME

Le plan (Π) est muni d'un repère orthonormé.
A chacun de ses points est associé son affixe, que l'on choisira sous forme algébrique ou trigonométrique.

Partie A

Les données étant deux nombres complexes a et b, on se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(1) \qquad z = a\overline{z} + b,$$

où $\overline{z}$ est le nombre complexe conjugué de z.
On pose

1. Le groupe I comprend la plupart des centres du Bassin méditerranéen.

$$\begin{array}{lclcl} z & = & x+\mathrm{i}y & = & p(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),\\ a & = & p+\mathrm{i}q & = & r(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha),\\ b & = & u+\mathrm{i}v & = & s(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta) \end{array}$$

et l'on désigne par M, A et B les images respectives de z, a et b dans (Π).

1. Former un système donnant des conditions nécessaires et suffisantes liant x, y, p, q, u et v pour que (1) soit satisfaite.
2. À quel ensemble, E, le point A doit-il appartenir pour que ce système ait une solution unique ?

   On désignera par Γ le complémentaire de E dans (Π).
3. On suppose que A appartient à E ; résoudre (1) et montrer que sa solution, ζ, peut s'exprimer uniquement avec les symboles $a, \overline{a}, b$ et $\overline{b}$.
4. On suppose que A appartient à Γ ; on définira alors a par son argument.
   a. A étant choisi, à quel ensemble F_α le point B doit-il appartenir pour que (1) ait une infinité de solutions ?

   b. A et B étant choisis de façon que (1) ait une infinité de solutions, déterminer l'ensemble des images M de ces solutions.

Partie B

Les données sont deux nombres complexes λ et μ d'images respectives P et Q.
On se propose d'étudier la transformation ponctuelle $\mathcal{T}$ définie par

$$(2) \qquad Z = \frac{z-\lambda}{z-\mu}$$

qui, à $m(z)$, associe $\mathrm{M}(Z)$.
On suppose $\lambda \neq \mu$.

1. Quel est l'ensemble de définition de $\mathcal{T}$?
2. Étudier l'ensemble des antécédents par $\mathcal{T}$ d'un point M donné.
   a. Montrer que, si M n'appartient pas à une courbe (Γ), que l'on déterminera, il possède un antécédent unique.

   b. Montrer que l'ensemble des points m dont les transformés appartiennent à (Γ) est une droite Δ, qu'on déterminera.

   Déterminer $\mathcal{T}(\Delta)$.
3. Montrer que les images réciproques par $\mathcal{T}$ des cercles de centre O appartiennent à un faisceau linéaire de cercles, que l'on caractérisera.