Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Groupe I bis septembre 1984 ∽

EXERCICE 1 **4 points**

On considère l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$z^4 - 6(1+\mathrm{i})z^3 + 27\mathrm{i}z^2 + 27(1-\mathrm{i})z - 22 + 6\mathrm{i} = 0 \quad \text{(E)}.$$

1. Démontrer que les solutions de l'équation :

$$z^2 - (1+2\mathrm{i})z + 2\mathrm{i} = 0$$

   sont aussi solutions de (E).
2. Achever la résolution de (E) en la mettant sous la forme :

$$\left[z^2 - (1+2\mathrm{i})z + 2\mathrm{i}\right]\left[z^2 + az + b\right] = 0,$$

   a et b étant deux éléments de $\mathbb{C}$.
3. Quel est le polygone formé par les images des quatre racines de (E) ?

EXERCICE 2 **4 points**

On considère un triangle ABC rectangle en A et le point H pied de la hauteur sur (BC).
Montrer que le triangle ABH est l'image de CAH dans une similitude directe que l'on déterminera (centre, rapport et angle).
Montrer que le triangle HAC est l'image de ABC dans le produit d'une similitude directe par une symétrie axiale que l'on déterminera.
Par quelle transformation peut-on passer du triangle ABC au triangle HBA ?

PROBLÈME **12 points**

On note :

$$\begin{aligned} P_1(x) &= 1 + x \\ P_2(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} \\ P_3(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \end{aligned}$$

Partie A

Étudier les sens de variation des trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par P_1, P_2, P_3 et tracer leurs courbes représentatives $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sur un même graphique.
On précisera les positions relatives de ces trois courbes ainsi que leurs points d'intersections deux à deux.

Partie B

1. On se propose de calculer la racine de l'équation $P_3(x) = 0$. On note r cette racine.

Montrer que r existe et est unique. Donner un encadrement de r d'une longueur égale à 10^{-2}.

Montrer que si $t = -r$, t vérifie la relation : $t = 3 \cdot \dfrac{2+t^2}{6+t^2}$.

2. Étudier la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = 3 \cdot \frac{\left(2+x^2\right)}{6+x^2}.$$

Tracer sa courbe représentative sur l'intervalle $[0\,;\,3]$.

Chercher le maximum de la dérivée φ' de φ lorsque x est positif.

3. Pour calculer une valeur approchée de t on construit la suite :

$$u_0 = 1,59, \quad u_{n+1} = \varphi\left(u_n\right).$$

a. Calculer $u_{n+1} - t$ en fonction de u_n et de t.

b. Montrer que :

- $u_n - t$ est de signe constant,
- u_n appartient à l'intervalle $[1\,;\,1{,}6]$,
- $|u_{n+1} - t| < \dfrac{12}{7 \times 8,5}\left|u_n^2 - t^2\right| < \dfrac{12 \times 3,2}{7 \times 8,5}|u_n - t|$,
- $|u_{n+1} - t| < \dfrac{12}{8,5^2}\left|u_n^2 - t^2\right| < 0,532|u_n - t|\cdot$

En déduire que la suite (u_n) converge vers t.

c. Comparer la formule obtenue à la majoration que l'on peut déduire de l'inégalité des accroissements finis appliquée à :

$$|u_{n+1} - t| = \left|\varphi\left(u_n\right) - \varphi(t)\right|.$$

d. Calculer u_1 et u_2 ainsi qu'une majoration de $|u_n - t|$ pour chacun d'eux.

En déduire un encadrement de t après chaque calcul. Combien faut-il calculer de termes u_n pour connaître t avec une erreur inférieure à 10^{-6}.