

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C septembre 1984 Guyane ∞

EXERCICE 1

Dans le plan affine euclidien P , on considère un triangle isocèle ABC de sommet A tel que $AB = AC = 3a$ et $BC = 2a$ (a étant un réel strictement positif).

On appelle G le barycentre des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 2, 3 et 3.

Soit I le milieu de $[BC]$, J le milieu de $[AI]$.

1. Montrer que G est le milieu de $[IJ]$.
2. M étant un point de P , calculer $2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2$ en fonction de MG et de a .
3. Déterminer l'ensemble des points M de P tels que

$$2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2 = 18a^2.$$

4. Déterminer l'ensemble E des points M de P tels que

$$2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2 = 22a^2.$$

5. Démontrer que les droites (BC) , (AB) et (AC) ont, chacune, un unique point commun avec E .

Que représente le point G pour le triangle ABC ?

EXERCICE 2

Dans le plan affine euclidien, muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (unité 1 cm) on considère les courbes C et C' d'équations respectives :

$$C : 16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$$

$$C' : 16x^2 + 49y^2 - 16x + 294y + 261 = 0$$

1. Trouver les équations réduites des deux courbes. Préciser leur nature et vérifier qu'elles ont le même centre.
2. Trouver les éléments remarquables de C et C' (sommets, foyers, directrices, asymptotes éventuelles).
3. Tracer C et C' .

PROBLÈME

Partie A

1. Étudier les variations de l'application g de l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ dans \mathbb{R} telle que

$$g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1).$$

En déduire que pour tout x réel strictement supérieur à -1 , $g(x) < 0$.

2. Soit f l'application de l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ dans \mathbb{R} telle que :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- a. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
 b. Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité 2cm).

Partie B

On désigne par E l'ensemble des fonctions définies sur \mathbb{R}_+ par

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

où a, b, c, d sont des nombres entiers positifs vérifiant $|ad - bc| = 1$.
 Soit F un élément de E .

1. Montrer que, pour tout x réel strictement positif :

$$F(x) \in \left] \frac{a}{c} ; \frac{b}{d} \right[\quad \text{ou} \quad F(x) \in \left] \frac{b}{d} ; \frac{a}{c} \right[$$

et que

$$\left| F(x) - \frac{a}{c} \right| \leq \frac{1}{cd}, \quad \left| F(x) - \frac{b}{d} \right| \leq \frac{1}{cd}.$$

2. Pour tout x réel strictement positif, on considère

$$m(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \left| F(t) - \frac{a}{c} \right| dt.$$

- a. Montrer que $0 \leq m(x) \leq \frac{1}{cd}$.
 b. Calculer $m(x)$.
 c. Reconnaître m dans le cas où $c = d = 1$.

Partie B

On considère la fonction R définie pour tout x strictement positif par

$$R(x) = \frac{x+1}{x}.$$

On pose $F_1 = R \circ R$ et pour tout entier n non nul $F_{n+1} = F_n \circ R$.

1. a. Exprimer $F_1(x)$ en fonction de x .
 b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul $F_n(x)$ s'écrit sous la forme :

$$F_n(x) = \frac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n}.$$

où a_n, b_n, c_n, d_n sont des entiers naturels strictement positifs, termes généraux de suites définies sur \mathbb{N}^* vérifiant :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n, & b_{n+1} = a_n, \\ c_{n+1} = c_n + d_n, & d_{n+1} = c_n. \end{cases}$$

- c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, F_n appartient à E.
 2. On note I_n l'intervalle ouvert d'extrémités $\frac{a_n}{c_n}$ et $\frac{b_n}{d_n}$.
 3. a. Montrer par récurrence que : pour tout entier naturel n non nul, $c_n > n$.
 En déduire que la longueur de I_n , $\left[\frac{a_n}{c_n} - \frac{b_n}{d_n} \right]$, tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
 b. Montrer que la suite $(c_n d_n)$, définie pour tout n de \mathbb{N}^* est croissante et trouver un entier n tel que

$$\left| \frac{a_n}{c_n} - \frac{b_n}{d_n} \right| < 10^{-3}.$$

4. Déterminer le réel positif Φ tel que $R(\Phi) = \Phi$.

Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a

$$\Phi = F_n(\Phi).$$

En utilisant la question B 1., montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a Φ élément de I_n .

N. B. : dans tout le problème, les fonctions considérées sont des fonctions numériques d'une variable réelle x .

\ln désigne la fonction logarithme népérien.