

Baccalauréat C HO–CHI–MINH Ville juin 1979

EXERCICE 1

4,5 POINTS

1. a. p étant un entier naturel supérieur ou égal à 2, on définit la suite

$$(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, \quad \text{par : } V_n = \frac{p^n}{n+1}.$$

Démontrer que cette suite est strictement croissante.

En déduire que : $(\forall p > 2), (\forall n > 1), \frac{p^n}{n+1} \geq 1$

et : $(\forall p > 5), (\forall n > 1), \frac{p^n}{n+1} > 2.$

b. Trouver, à l'aide du résultat précédent, tous les couples $(p ; n)$ où p est un entier naturel premier, et n un entier strictement positif, qui vérifient

$$1 \leq \frac{p^n}{n+1} \leq 2.$$

2. Soit a un entier naturel non nul, qui s'écrit

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

où p_1, p_2, \dots, p_k sont des entiers naturels premiers, deux à deux distincts, et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ des entiers naturels non nuls.

On admettra que le nombre de diviseurs de a dans \mathbb{N} est

$$d(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1).$$

En utilisant 1. b., déterminer les entiers naturels non nuls a tels que $a = 2d(a)$.

EXERCICE 2

4,5 POINTS

Soit ABC un triangle, non équilatéral, d'un plan affine euclidien P et soit

$$a = \|\overrightarrow{BC}\|, \quad b = \|\overrightarrow{CA}\|, \quad c = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

Soit G le centre de gravité du triangle.

1. Démontrer que $GA^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9}.$

2. Déduire du 1. la valeur de

$$(b^2 - c^2)GA^2 + (c^2 - a^2)GB^2 + (a^2 - b^2)GC^2.$$

3. Déterminer l'ensemble D des points M du plan P tels que

$$(b^2 - c^2)MA^2 + (c^2 - a^2)MB^2 + (a^2 - b^2)MC^2 = 0.$$

(On mettra en évidence deux points de D.)

PROBLÈME

11 POINTS

Partie A

Soit f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}.$$

On appelle P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra pour unité : 1 cm).

1. a. Étudier la fonction f .
- b. Construire la courbe C représentant f dans le repère \mathcal{R} du plan P .
2. a. Soit C' la courbe représentative dans \mathcal{R} de la fonction g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$g(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 + 4x}.$$

Démontrer que C et C' sont symétriques par rapport au point Ω de coordonnées $(-2; -1)$, (On ne demande pas d'étudier g).

- b. Comment obtient-on à partir de C la courbe Γ , ensemble des points du plan P dont les coordonnées dans \mathcal{R} vérifient :

$$y^2 - 2(x+1)y - 2x + 1 = 0.$$

Représenter Γ sur le dessin fait au 1.

3. a. Démontrer que f définit une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[1; +\infty[$, dont la bijection réciproque est l'application h , qui peut s'écrire sur $[1; +\infty[$:

$$h(x) = \frac{(x+1)^2 - 4(x+1) + 4}{2(x+1)}$$

- b. Calculer $\int_1^{2+\sqrt{5}} h(x) dx$, puis l'aire en cm^2 du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe C , et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
On donnera le résultat à 10^{-2} près).

Partie B

On considère à présent le repère $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ du plan, où Ω est le point de coordonnées $(-2; -1)$ et où $\vec{I} = \vec{i}$, $\vec{J} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

1. a. Étant donné un point M du plan P , on note $(x; y)$ ses coordonnées dans \mathcal{R} , $(X; Y)$ ses coordonnées dans \mathcal{R}' .
Exprimer x et y en fonction de X et Y .
- b. Écrire l'équation de Γ dans le repère \mathcal{R}' , et reconnaître cette courbe.
2. Pour tout nombre réel non nul k , on note Δ_k la droite d'équation $Y = kX$ dans \mathcal{R}' .

- a. k et k' étant deux réels non nuls distincts, exprimer analytiquement dans \mathcal{R}' , la symétrie d'axe Δ_k parallèlement à $\Delta_{k'}$.
- b. Démontrer que pour tout nombre réel non nul k , il existe $k' \in \mathbb{R}^*$, unique tel que la symétrie par rapport à Δ_k parallèlement à $\Delta_{k'}$ échange le support des axes du repère \mathcal{R}' . On note S_k cette symétrie.
- c. Vérifier que, quel que soit le réel k non nul, S_k conserve la courbe Γ .