∽ CONCOURS POUR L'ADMISSION EN FORMATION DES INGÉNIEURS ∽
DE L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE MARITIME
ANNÉE 2011

Durée : 2 heures

1re QUESTION (valeur = 5)

On donne $I = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$ et $J = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin^2 t\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que I et J sont positives
2. Calculer $I+J$.
3. Montrer que $I - J = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} t\cos(2t)\,\mathrm{d}t$.
4. Calculer $I-J$ en effectuant une intégration par partie
5. En déduire I et J.

2e QUESTION (valeur = 6)

f est l'application de $\mathbb{C} - \{-\mathrm{i}\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

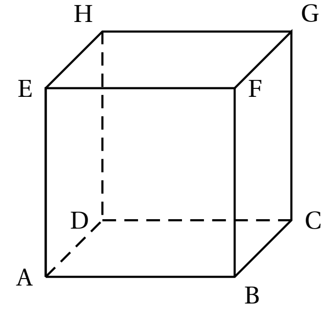
$$z \longmapsto f(z) = \frac{\mathrm{i}z}{z+\mathrm{i}}.$$

$\mathscr{P}$ est le plan complexe rapporté au repère orthonormal (0 ; Ü ; 11)

1. Déterminer les coordonnées du point B dont l'affixe z_B vérifie $f(z) = 1+2\mathrm{i}$.
2. M est le point d'affixe z.
   - **a.** Calculer $f(z) - \mathrm{i}$.
   - **b.** En appelant r le module de $z+\mathrm{i}$ et θ un argument de $z+\mathrm{i}$, écrire $f(z)-\mathrm{i}$ en fonction de r et de θ.
3. A est le point d'affixe $(-\mathrm{i})$
   - **a.** Déterminer l'ensemble C des points M tels que $\left|f(z)-\mathrm{i}\right| = \sqrt{2}$.
   - **b.** Déterminer l'ensemble D des points M tels qu'une mesure de l'argument de $f(z)-\mathrm{i}$ soit $\dfrac{\pi}{4}$.
   - **c.** Montrer que B appartient à C et D.
   - **d.** Construire C et D.

3e QUESTION (valeur = 4)

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1 et le point M de la demi-droite [AE) défini par $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$.



1. Déterminer le volume du tétraèdre ABDM
2. I est le barycentre du système de points $\left\{\left(M\ ;\ \dfrac{2}{3}\right)\ ;\ (B\ ;\ 1)\ ;\ (D\ ;\ 1)\right\}$.
   - **a.** Exprimer $\overrightarrow{\text{BI}}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{BM}}$ et de $\overrightarrow{\text{BD}}$
   - **b.** calculer $\overrightarrow{\text{BI}} \cdot \overrightarrow{\text{AM}}$ et $\overrightarrow{\text{BI}} \cdot \overrightarrow{\text{AD}}$ et en déduire $\overrightarrow{\text{BI}} \cdot \overrightarrow{\text{MD}}$.
   - **c.** On admettra que $\overrightarrow{\text{DI}} \cdot \overrightarrow{\text{MB}} = 0$; préciser ce que représente I pour le triangle BDM.
3. Démontrer les égalités $\overrightarrow{\text{AI}} \cdot \overrightarrow{\text{MB}} = 0$ et $\overrightarrow{\text{AI}} \cdot \overrightarrow{\text{MD}} = 0$.
   En déduire une propriété de la droite (AI)
4. Montrer que le triangle BDM est isocèle, calculer son aire et déterminer la distance AK.

4e QUESTION (valeur = 5)

On considère la fonction numérique f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x}\mathrm{e}^{1-x}.$$

C est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que f peut s'écrire sous la forme $f(x) = \dfrac{x\mathrm{e}}{\sqrt{x}\mathrm{e}^x}$ pour tout $x > 0$.
   En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement.
2. Démontrer que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ puis calculer f'.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$; préciser si f est dérivable en 0 et interpréter géométriquement.
4. Tracer le tableau de variation de f.
5. Construire la courbe C (unité 2 cm).

Nota :
***1.** Aucun document n'est autorisé.*
***2.** Délits de fraude : « Tout candidat pris en flagrant délit de fraude ou convaincu de tentative de fraude sera immédiatement exclu de la salle d'examen sans préjudice de l'application des sanctions prévues par les lois et règlements en vigueur réprimant les fraudes dans les examens et concours publics. »*