APMEP, régionale de Franche-Comté
19 mars 2008, Michel Henry

Une introduction au concept de probabilité III

Questions posées par son enseignement dès le collège

Programmes des lycées des années 2000

Classe de seconde : expérimentations numériques, observations des fluctuations d'échantillonnage, simulation et distributions de fréquences

Classes de première : expérience aléatoire, vocabulaire des événements, loi de probabilité sur un ensemble fini d'issues, probabilité d'un événement, loi des grands nombres, modèle d'équiprobabilité.

Classe de terminale S : probabilités conditionnelles, indépendance, formule des probabilités totales, lois discrètes (Bernoulli, binomiale), lois continues (uniforme, exponentielle), adéquation de données à une loi équirépartie.

Dans cette progression, la définition (scolaire) de la probabilité synthétise les deux approches dans le cadre de la modélisation :

- Une **expérience aléatoire** donne lieu à n **issues possibles** notées x_i. Un **événement** est représenté par un ensemble de ces issues.

- On **modélise** cette expérience par une **loi de probabilité P**: aux x_i on fait correspondre les p_i tels que $0 \leq p_i \leq 1$ et $\sum p_i = 1$. Si $p_i = 1/n$, la loi est **équirépartie**.

- La **probabilité d'un événement** est la somme des p_i associées aux issues constituant cet événement (deuxième principe de Laplace).

- On en déduit les propriétés: $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$, $P(A^c) = 1 - P(A)$,
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Le futur programme de troisième (2008), partie statistique

1.3. Statistique Caractéristiques de position *Approche de caractéristiques de dispersion* [Thèmes de convergence]	Une série statistique étant donnée (sous forme de liste ou de tableau ou par une représentation graphique : - *déterminer une valeur médiane de cette série et en donner la signification ;* - *déterminer des valeurs pour les premier et troisième quartiles et en donner la signification ;* - *déterminer son étendue.* - Exprimer et exploiter les résultats de mesures d'une grandeur. [SVT, Histoire, Géographie, Physique…]	*Il s'agit essentiellement de mettre en place des éléments de résumé des séries statistiques permettant de compléter l'information apportée par la moyenne, abordée en quatrième.* Le travail est conduit aussi souvent que possible en liaison avec les autres disciplines dans des situations où les données sont exploitables par les élèves. *Le fait que contrairement à la moyenne, la médiane ne dépend pas des valeurs extrêmes est dégagé.* *Le recours aux quartiles permet de préciser la dispersion d'une série par rapport à la seule notion d'étendue. La notion d'intervalle interquartile sera abordée en classe de première.* La notion de dispersion est à relier, sur des exemples, au problème posé par la disparité des mesures d'une grandeur, lors d'une activité expérimentale, en particulier en physique et chimie. L'utilisation d'un tableur permet d'avoir accès à des situations plus riches que celles qui peuvent être traitées « à la main ».	Deux objectifs, figurant dans la partie relative à la culture scientifique, sont ici visés : - comprendre qu'à une mesure est associée une incertitude ; - comprendre la nature et la validité d'un résultat statistique.

Outils de la description statistique : diagrammes, moyenne, médiane, quartiles, étendue

Le futur programme de troisième (2008), partie probabilités

1.4. Notion de probabilité [Thèmes de convergence]	- Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilité. - Calculer des probabilités dans des contextes familiers.	La notion de probabilité est abordée à partir de situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loteries, urnes). Certaines de ces situations permettent de rencontrer des cas pour lesquels les probabilités ne sont pas définies à partir de considérations intuitives de symétrie ou de comparaison mais sont approximativement évaluées par les fréquences observées expérimentalement (approche fréquentiste des probabilités). La notion de probabilité est utilisée pour traiter des situations de la vie courante pouvant être modélisées simplement à partir des situations précédentes. Les situations étudiées concernent les expériences aléatoires à une ou *à deux épreuves*.

Dans le cadre du socle, aucune compétence n'est exigible dans le cas des expériences à deux épreuves.

Document d'accompagnement du programme de troisième (projet)

Le document rappelle dans son introduction :

« ***Le langage élémentaire de la statistique (avec ses mots tels que moyenne, dispersion, estimation, fourchette de sondage, différence significative, corrections saisonnières, espérance de vie, risque, etc.) est, dans tous les pays, nécessaire à la participation aux débats publics : il convient donc d'apprendre ce langage, ses règles, sa syntaxe, sa sémantique ; l'enseignement de la statistique étant, par nature, associé à celui des probabilités, il s'agit en fait d'une 'formation à l'aléatoire'*** ».

(CREM, Rapport au Ministre, 2002).

- En première partie, il développe quelques « ***éléments d'histoire de la notion de probabilité*** », reprenant les travaux de Bernoulli et De Moivre pour souligner la notion de fluctuation d'échantillonnage et introduire l'estimation fréquentiste d'une probabilité par intervalle de confiance.

- En deuxième partie, le document indique les « ***choix du programme*** » : les différentes interprétations de la probabilité, considérations de symétries et approche fréquentiste, puis il donne les propriétés à mettre en place, le langage et les moyens de représentation et de traitement (arbres notamment pour les expériences à deux épreuves).

- De nombreux exemples sont traités dans le texte et en annexe.

Document d’accompagnement du programme de troisième (projet), 2ème partie, §1

La progression suggérée dans la deuxième partie commence par la comparaison de générateurs de hasard équivalents : pièce, urne de Bernoulli, roulette de loterie, faisant appel à une intuition élémentaire de préprobabilité (rapport des chances) dans la situation la plus simple du pile ou face.

Le texte indique: « ***Les justifications solliciteront l’une quelconque des interprétations de la probabilité : interprétation fréquentiste dans sa variante ‘propension’ ; mais certains élèves feront certainement appel à l’interprétation épistémique, dans sa variante personnelle ou interpersonnelle ; la variante logique conduisant à faire appel au principe d’indifférence (ou de raison insuffisante)*** ».

D’autres exemples (dés, urnes, roulettes) conduisent à des comparaisons quantitatives de probabilités et aboutissent à la formule de Laplace (premier principe), illustrée par un exercice tiré de l’évaluation PISA faisant appel à un modèle d’urne.

Ce paragraphe centré sur la perception de l’équiprobabilité se termine par un exemple de calcul de probabilités géométriques (tir sur une cible).

Document d'accompagnement du programme de troisième (projet), 2ème partie, §2

La progression aborde ensuite l'approche fréquentiste en reprenant l'exemple du lancer de punaise. Le document indique :

« ***L'approche fréquentiste exige que des fréquences soient observées expérimentalement… à la longue, [la fréquence des têtes] tend à se stabiliser autour d'une valeur (qui dépend, entre autres, de la punaise). L'intérêt du lancer de punaise réside dans le fait qu'on ne peut approcher cette valeur que par l'expérimentation*** ».

Il propose :

« ***au lieu de réaliser des lancers de punaise, on peut demander [aux élèves] de jouer au jeu du franc carreau… L'idée d'entreprendre une série de lancers est alors assez naturelle, et s'appuie sur la connaissance naïve de la loi des grands nombres de Bernoulli… Cette situation présente l'avantage que l'on connaît la valeur exacte de la probabilité de gagner par un calcul de 'probabilité géométrique' sans qu'elle soit connue au départ*** ».

Le document ajoute :

« ***Dans un second temps, on peut faire usage d'une simulation sur un tableur*** »,

et traite un exemple faisant apparaître visuellement sur un graphique le phénomène de stabilisation de la fréquence.

Document d'accompagnement du programme de troisième (projet), 2ème partie, §3

Le document met ensuite en place les moyens de décontextualisation : langage des événements, propriétés abstraites des probabilités, moyens de représentation et de traitement.

Propriétés abstraites de base des probabilités :

- La probabilité d'un événement A est notée p(A). Elle est comprise entre 0 et 1.
- La probabilité d'un événement certain est égale à 1. La probabilité d'un événement impossible est égale à 0.
- Si A et B sont incompatibles, $p(\text{A ou B}) = p(\text{A}) + p(\text{B})$.
- $p(\text{non A}) = 1 - p(\text{A})$.

Moyens de représentation et de traitement :

- les arbres des possibles
- les arbres pondérés

Le document conclut par une introduction à la probabilité conditionnelle partant d'un extrait d'arbre :

$$\Omega \xrightarrow[p(\text{A})]{\qquad\qquad} \text{A} \xrightarrow[p_{\text{A}}(\text{B})]{\qquad\qquad} \text{B}$$

« Au bout du chemin, se trouve une feuille qui représente l'événement 'A et B'. Sa probabilité est le produit des probabilités rencontrées sur les branches le long du chemin : $p(\text{A et B}) = p(\text{A}) \times p_{\text{A}}(\text{B})$ ».

Document d’accompagnement du programme de troisième (projet), 2ème partie, §3

Proposons pour terminer un des nombreux exercices du document, « ***montrant comment utiliser les représentations et traitements qui précèdent dans une situation de la vie courante*** », tiré de PARZYSZ B, 1990, Un outil sous-estimé : l’arbre probabiliste, *Bulletin de l’APMEP* n° **372**, pp. 47-52 :

Un scrutin a été organisé pour renouveler le conseil municipal d’une ville. Pour l’analyse des résultats, on distingue d’une part les électeurs (ceux qui ont le droit de vote) d’autre part les votants (qui ont pris part au vote). Les électeurs sont répartis en trois groupes en fonction de leur âge :

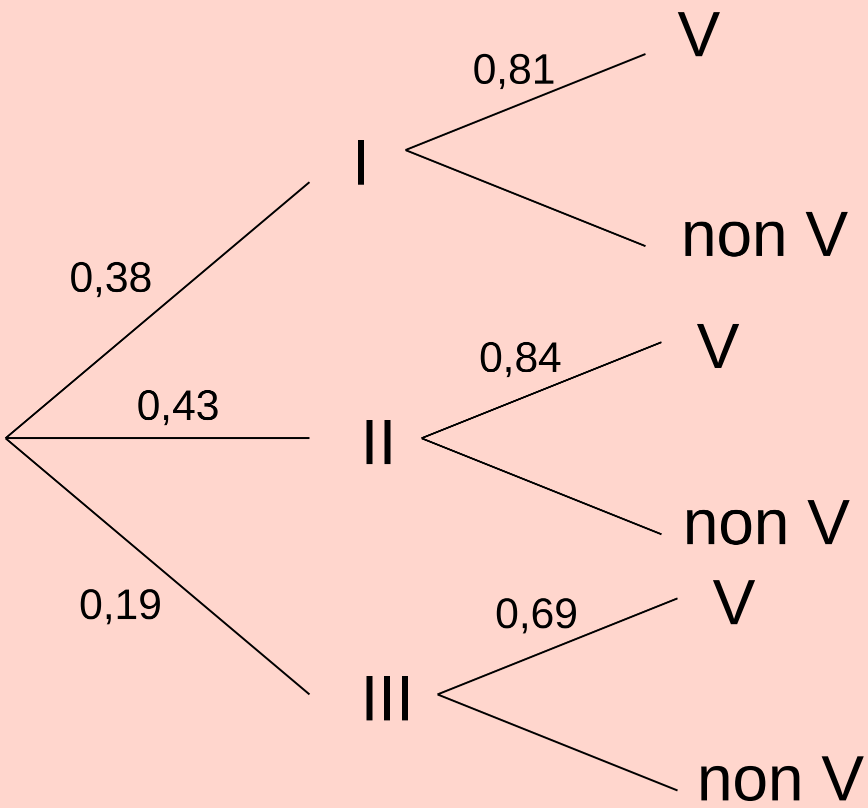
- Le groupe I, électeurs de moins de 35 ans, 38 % de l’ensemble des électeurs ;
- Le groupe II, électeurs de 35 à 60 ans, 43 % de l’ensemble des électeurs ;
- Le groupe III, électeurs de plus de 60 ans, 19 % de l’ensemble des électeurs ;

Les taux de participation ont été déterminés dans chacun des groupes : 81 % dans le I, 84 % dans le II, 69 % dans le III.

On choisit au hasard un électeur. Quelle est la probabilité qu’il ait voté ?

(Rép. : 80 %)

Solution :



Pour trouver la probabilité demandée, il suffit d'additionner les probabilités des chemins qui aboutissent à V :

$0,38\times0,81 + 0,43\times0,84 + 0,19\times0,69$

Soit environ 80 %