Introduction aux nombres complexes

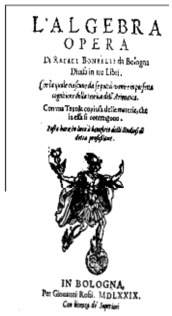
1535 : Tartaglia résout des équations du type: $x^3 + px = q$ et $x^3 = px + q$ en secret
En secret car il l'utilise dans des concours ou défis pour résoudre des équations en nombres (a priori à l'époque personne ne connait encore de formule générale pour le degré 3 ; alors que les équations de degré 2 sont déjà résolues par les Babyloniens 2000 ans av. JC ; et généralisées par les mathématiciens arabes du Moyen-Age comme Al-Khwarizmi)

1538 : Tartaglia livre son secret à Cardan
Cardan lui a promis qu'il ne publierait pas la solution mais … on connait maintenant les « formules de Cardan »
1545 : Cardan publie la solution

Voici la règle proposée par J.Cardan, dans son ouvrage *Ars Magna* (1545), pour déterminer la solution positive de l'équation $x^3 + px = q$ (p>0;q>0).

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$$

Cardan tombe a priori sur des équations qui posent problème mais il les évite.



1550 : Bombelli redécouvre la même difficulté que Cardan .
Au contraire de Cardan, il va s'y confronter et chercher une manière de faire (Il la surmonte en introduisant un calcul sur des *« imaginaires »*)

Regardons sur un exemple le problème en jeu
Résolution de $x^3 = 15x + 4$
• 4 est solution de cette équation. Le vérifier.
(on peut aussi ne pas donner la valeur, faire justifier qu'il existe une solution (TVI) puis faire trouver la valeur à la calculatrice)
• Appliquer les formules de Cardan. Quelle expression trouve-t-on?
Attention là l'équation est de la forme $x^3 = px + q$ (p>0;q>0) équivalente à $x^3 - px = q$ (p>0;q>0) d'où la solution

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$$

On remplace par p=15 et q = 4 et on trouve $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}-\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}}$

Problème : la racine d'un nombre négatif ! (à une époque où les négatifs eux-mêmes sont à peine admis dans les calculs … et encore pas comme solution finale … au mieux comme intermédiaires de calcul.)

Remarque : Le problème aurait pu se poser pour les équations du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ quand on applique les formules $\frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Mais dans le cas où $b^2 - 4ac$ est négatif , il n'y pas de solution réelle donc ça n'est pas grave que l'application de la formule pose problème. Ici le vrai problème est qu'il y a une solution qui existe (4) et que les formules ne fonctionnent pas !!

Bombelli décide alors de passer outre ce problème de racine de négatif en définissant A l'occasion de la résolution de l'équation : $x^3 = 15x + 4$ dans $\mathbb{R}$, il invente « quelque chose » dont le carré est –1. Il nomme cette chose « plus de moins » (più di meno).

« J'ai trouvé une autre sorte de R.c très différente des autres, qui paraît au chapitre sur le cube égal à une quantité et à un nombre quand le cube du tiers de la quantité est plus grand que le carré de la moitié du nombre comme il a été démontré dans ce chapitre. Cette sorte de R.q a pour son algorithme, des opérations différentes des autres et a un nom différent ; car lorsque le cube du tiers de la quantité est plus grand que le

carré de la moitié du nombre, l'excès ne peut être appelé ni plus ni moins, mais il peut être appelé plus de moins quand il a été ajouté et quand il a été retranché, il sera appelé moins de moins et cette opération est encore nécessaire pour l'autre R.c dans le chapitre sur la puissance de la puissance accompagnée du cube de la quantité […] *où les cas d'égalité faisant apparaître cette sorte de racine carrée sont beaucoup plus importants que les autres. […]*
d'abord je traiterai de la multiplication en donnant les règles pour plus et moins :

	soit en utilisant la notation $\sqrt{-1}$
Più via più di meno fa più di meno	$+1 \times \sqrt{-1} = \sqrt{-1}$
Meno via più di meno fa meno di meno	$-1 \times \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$
Più via meno di meno fa meno di meno	$+1 \times -\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$
Meno via meno di meno fa più di meno	$-1 \times -\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$
Più di meno via più di meno fa meno	$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$
Più di meno via men di meno fa più	$\sqrt{-1} \times -\sqrt{-1} = +1$
Meno di meno via più di meno fa più	$-\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = +1$
Meno di meno via meno di meno fa meno »	$-\sqrt{-1} \times -\sqrt{-1} = -1$

Ces règles de calcul lui permettent de justifier que
$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2+\sqrt{-121} = 2+11\sqrt{-1}$ et $\left(-2+\sqrt{-1}\right)^3 = -2+\sqrt{-121} = -2+11\sqrt{-1}$

Si on remplace dans la formule (de Cardan) on trouve alors bien la valeur 4 attendue !

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}}$$
$$= 2+\sqrt{-1} - (-2+\sqrt{-1})$$
$$= 4$$

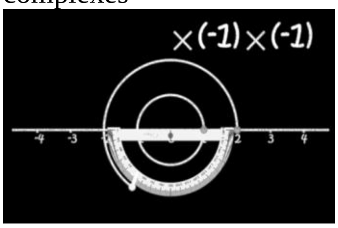
1572 : Bombelli publie, dans Algebra, ses calculs de 1550

1777 : Euler introduit en 1777 le symbole i pour désigner $\sqrt{-1}$

Les imaginaires sont jusque là notés a + b$\sqrt{-1}$
D'où vient la nécessité de trouver une notation à part entière ? Essentiellement la difficulté d'appliquer correctement les règles de calculs sur les racines carrées ; en particulier celle qui pose problème est $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$
En effet par définition on doit poser $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$
Mais si on applique la règle de calcul on a $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-1 \times -1} = 1$
En le notant i on évite ce litige !

Les mathématiciens vont être très partagés sur cette « invention » des imaginaires ; certains vont trouver l'idée intéressante ; ils n'auront pas le statut de nombres mais seront acceptés à l'intérieur des calculs pourvu qu'ils se simplifient à la fin ; d'autres mathématiciens accepteront moins leur utilisation.

Ce qui aidera à leur donner du sens c'est leur représentation géométrique
XIXème :
Argand, Wessel (entre autres) donnent au début du XIX^{e} siècle une interprétation géométrique des nombres complexes



Multiplier par (-1), c'est « tourner de 180° » .
Multiplier par $(-1)^2$, c'est « tourner de 360° » .
Donc logiquement :
Multiplier par « $\sqrt{-1}$ », cela devrait être « tourner de 90° » d'où l'axe des ordonnées pour représenter i, 2i, 3i etc.

Image extraite de voir chapitre 5 du film Dimensions
https://www.youtube.com/embed/cL7BpDrRc4s?list=PLw2BeOjATqrtiLPWvH_VeXmmBRmwcEwLz