∽ Baccalauréat C La Réunion juin 1979 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Déterminer les entiers relatifs x congrus à -1 modulo 5 et à 0 modulo 3 :

$$x \equiv -1 \quad [5] \quad \text{et} \quad x \equiv 0 \quad [3].$$

2. Déterminer les entiers relatifs x tels que :

$$x \equiv 2 \quad [5]\text{et} \quad x \equiv -1 \quad [3]$$

3. Résoudre dans l'anneau $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ l'équation :

$$x^2 + \dot{4}x + \dot{3} = 0$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Etudier la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} f(x) & = & x - |x \log x| \quad \text{si } x > 0\\ f(0) & = & 0.\end{array}\right.$$

1. La fonction f est-elle continue sur $[0\,;\,+\infty[$?
   Est-elle dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$?
2. Construire la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé. Préciser en particulier les tangentes à la courbe aux points d'intersection avec l'axe des abscisses.

PROBLÈME **12 POINTS**

Rappels : L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. $\overline{z}$ désigne le conjugué de z. L'application $p\,:\,\mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$ qui au couple $\left(z,\ z'\right)$, associe la partie réelle de $z\overline{z'}$ est un produit scalaire; une base orthonormée de $\mathbb{C}$ munie de ce produit scalaire est $(1,\ \text{i})$.

1. On donne un nombre complexe u et l'on considère l'ensemble D des complexes z tels que

$$z + u\overline{z} = 0.$$

   a. Démontrer que D est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$.
   b. Démontrer que si $|u| \neq 1$, D est de dimension O.
   c. Démontrer que si $|u| = 1$ et $u \neq 1$, D est la droite vectorielle de base $(1 - u)$.
   Etudier le cas $u = 1$.

2. a est un réel non nul, b est un élément de $\mathbb{C}-\mathbb{R}$.

   On considère l'application φ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\varphi(z) = az + b\overline{z}.$$

   a. Montrer que φ est linéaire.

   b. Étudier le noyau de φ. En déduire que φ est bijective si et seulement si $|a| \neq |b|$.

3. Dans cette question on suppose que φ est bijective.

   Étudier suivant les valeurs du réel λ l'ensemble E_λ des nombres z tels que $\varphi(z) = \lambda z$.

   Montrer qu'il existe dans $\mathbb{C}$ deux droites vectorielles globalement invariantes par φ et que ces deux droites sont orthogonales.

4. On suppose dans cette question que $a = |b|$.

   a. Déterminer l'image de φ.

   b. Montrer que suivant les valeurs de a, φ est soit une projection vectorielle, soit la composée d'une projection vectorielle et d'une homothétie vectorielle.

5. On considère le plan affine euclidien P, muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_1}\right)$.

   À tout point m de coordonnées $(x\ ;\ y)$ on associe son affixe $z = x + \text{i}y$.

   a. Définir avec précision l'application f de P dans P dans laquelle m d'affixe z a pour image m' d'affixe

$$z' = \left(\cos\frac{2\pi}{3} - \text{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)\overline{z}.$$

   m étant donné, construire m' puis M tel que $\overrightarrow{\text{O}M} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\text{O}m} + \overrightarrow{\text{O}m'}\right)$.

   Quelle est la nature de l'application g de P dans P telle que $M = g(m)$?

   Quelle application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ peut-on lui associer ?

   b. Utiliser les résultats de la troisième question pour étudier l'application h de P dans P qui, à tout point m d'affixe z, associe le point M d'affixe $Z = -z + 2i\overline{z}$.

   Dessiner l'image du cercle de centre 0 et de rayon 1 dans cette transformation.