

## ∞ Baccalauréat C La Réunion juin 1983 ∞

### PROBLÈME

On se place dans tout le problème dans un plan rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , noté  $\mathcal{R}$ .

Les axes sont désignés par  $(Ox)$  et  $(Oy)$ .

### Partie A

Soit  $f$  l'application de  $] -\infty; 1]$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{2}}.$$

1. Étudier les variations et limites de  $f$ .

Dans toute la suite du problème la représentation graphique de  $f$  dans le repère  $\mathcal{R}$  est notée  $\mathcal{C}$ .

Dessiner cette courbe. Préciser la tangente au point d'abscisse 1.

2. On désigne par  $s$  la symétrie affine orthogonale par rapport à l'axe  $(Ox)$ . On pose  $\mathcal{C}' = s(\mathcal{C})$ .

Établir que  $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$  est une parabole  $\mathcal{P}$  dont on déterminera le sommet, le foyer et la directrice.

3. Montrer que la courbe  $\mathcal{C}$  admet en chacun de ses points  $M$  une tangente.

Cette tangente coupe l'axe  $(Ox)$  en un point  $T$ .

Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur la droite  $(Ox)$ .

On désigne par  $S$  le point de coordonnées  $(1; 0)$ ; montrer que  $S$  est le milieu du segment  $[HT]$ .

En déduire une construction simple de la tangente à  $\mathcal{C}$  en un point  $M$  quelconque donné sur  $\mathcal{C}$ .

4. Déterminer une primitive de  $f$  sur l'intervalle  $] -\infty; 1]$ .

En déduire l'aire de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées  $(x; y)$  vérifient :

$$\begin{cases} 0 & \leq x \leq 1 \\ -f(x) & \leq y \leq f(x). \end{cases}$$

### Partie B

On se propose dans cette partie d'étudier l'existence et les propriétés de la suite réelle  $(u_n)$  définie par la donnée d'un réel  $u_0$  et la relation :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{1-u_n}{2}}.$$

1. a. Montrer que la suite  $(u_n)$  existe si, et seulement si,  $u_0 \in [-1; +1]$ .

- b. Déterminer  $u_0$  de sorte que la suite  $(u_n)$  soit constante.
2. Dans la suite de l'énoncé, on posera  $u_0 = \sin \alpha_0$ , avec :

$$\alpha_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right].$$

- a. Justifier ce choix. Que devient  $(u_n)$  si  $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$  ?
- b. Établir l'égalité, pour tout  $\alpha_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$ ,

$$\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

- c. Établir que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique  $\alpha_n$  de  $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$  tel que  $u_n = \sin \alpha_n$ .

Quelle relation y a-t-il entre  $\alpha_{n+1}$  et  $\alpha_n$  ?

- d. On considère la suite  $(\beta_n)$  de terme général vérifiant :

$$\beta_n = \alpha_n - \frac{\pi}{6}.$$

Montrer que cette suite est une suite géométrique.

En déduire  $\alpha_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$  et  $\alpha_0$ .

La suite  $(u_n)$  a-t-elle une limite? Quelle est cette limite?

### Partie C

Soit M un point mobile de la courbe  $\mathcal{C}$  (étudiée dans la partie A) d'abscisse  $\sin t$ , avec  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$ .

- Déterminer la trajectoire du point M et le sens de déplacement du point M sur cette trajectoire.
- Déterminer le vecteur vitesse  $\vec{v}(t)$  et le vecteur accélération  $\vec{\gamma}(t)$  du point M à la date  $t$ . Étudier les variations de la fonction  $t \mapsto \|\vec{v}(t)\|^2$ ; on appellera  $t_0$  l'unique réel dans  $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$  tel que  $\sin t_0 = \frac{1}{16}$ .
- Soit  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$ .

Au point M, on associe les points V et  $\Gamma$  tels que le vecteur  $\overrightarrow{MV}$  soit le vecteur vitesse  $\vec{v}(t)$  et le vecteur  $\overrightarrow{M\Gamma}$  soit le vecteur accélération  $\vec{\gamma}(t)$ .

Étant donnée, sur la figure, la position de M (à la date  $t$ ) on demande de construire géométriquement (règle, compas) les points V et  $\Gamma$ .

Indication : Pour construire V on peut commencer de la façon suivante :

La perpendiculaire menée de M à l'axe (Ox) coupe le cercle de centre O et de rayon 1 en un ou deux points, dont un seul d'ordonnée positive ou nulle.

Quelle est l'ordonnée de ce point que l'on notera  $M'$  ?

(On fera le dessin pour la valeur de  $t$  telle que  $\sin t = \frac{1}{4}$ ).