

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C La Réunion juin 1985 ∞

EXERCICE 1

points

On considère les suites numériques  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définies par

$$\begin{cases} u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ et} \\ v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} u_n \text{ si } n \geq 1. \end{cases}$$

1. Montrer les inégalités

$$\begin{cases} \int_p^{p+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \leq \frac{1}{\sqrt{p}} \text{ si } p \in \mathbb{N}, p \geq 1 \\ \int_p^{p-1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \geq \frac{1}{\sqrt{p}} \text{ si } p \in \mathbb{N}, p \geq 2 \end{cases}$$

2. En déduire l'encadrement de  $u_n$  :

$$-2 + 2\sqrt{n+1} \leq u_n \leq -1 + 2\sqrt{n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

3. Déterminer les limites éventuelles, lorsque  $n$  tend vers l'infini, des suites :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

EXERCICE 2

points

Dans le plan P, on considère un carré ABCD dont les diagonales AC et BD ont pour longueur le réel donné strictement positif  $a$ .

Soit  $t$  un paramètre réel.

1. À quelle condition sur  $t$  le système de points pondérés  $(A, t), (B, 1-2t), (C, t), (D, 3-4t)$  admet-il un barycentre?

Déterminer la position de ce barycentre.

2. On note  $E_t$ , l'ensemble des points  $M$  du plan P vérifiant la relation :

$$t \|\overrightarrow{MA}\|^2 + (1-2t) \|\overrightarrow{MB}\|^2 + t \|\overrightarrow{MC}\|^2 + (3-4t) \|\overrightarrow{MD}\|^2 = a^2(1-t).$$

Déterminer la nature et les éléments remarquables de  $E_t$ .

On discutera suivant la valeur de  $t$ .

Vérifier que le centre du carré ABCD appartient à  $E_t$ .

**PROBLÈME****points****Partie A**

1. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle :

$$y'' + y = 0. \quad (1)$$

2. Étant donnée une fonction numérique de la variable réelle,  $g$ , deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ , on définit la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^*$  vers  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exprimer  $f''(x)$  à l'aide de  $g''\left(\frac{1}{x}\right)$  et de  $x$ .

3. On considère l'équation différentielle :

$$y'' = -\frac{1}{x^4} - y. \quad (2)$$

Démontrer que la fonction  $g$  deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  est solution de (2) si et seulement si la fonction  $f$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$ , est solution de (1).

4. En déduire l'ensemble des solutions de (2) définies sur chacun des intervalles  $]-\infty; 0[$  et  $]0; +\infty[$ .
5. Soit  $g$  une solution de l'équation (2) définie sur  $]0; +\infty[$ .

Déduire de ce qui précède une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^4}g(x)$ .

Calculer l'intégrale :  $I = \int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x} dx$ .

**Partie B**

On note  $g_1$  et  $g_2$  les fonctions numériques de la variable réelle définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g_1(x) = x \cos \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, g_2(x) = x \sin \frac{1}{x}.$$

1. a. Déterminer la fonction dérivée de  $g_1$  et étudier sa limite en  $+\infty$ .

- b. Étudier le signe de  $g_1''(x)$  sur l'intervalle  $\left[\frac{2}{\pi}; +\infty\right]$ .

En déduire les variations puis le signe de  $g_1'$  sur  $\left[\frac{2}{\pi}; +\infty\right]$ .

En conclure que  $g_1$  est strictement croissante sur  $\left[\frac{2}{\pi}; +\infty\right]$ .

- c. En utilisant un développement limité d'ordre 2 en 0 pour la fonction cosinus, montrer qu'il existe une fonction  $\epsilon$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g_1(x) = x - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \epsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

En déduire que la courbe représentative de  $g_1$  admet une asymptote, que l'on précisera, lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

2. a. Déterminer la fonction dérivée de  $g_2$  et étudier sa limite en  $+\infty$ .  
 b. Montrer que  $g_2$  est strictement croissante sur l'intervalle  $\left[\frac{1}{\pi}; +\infty\right]$ . (On pourra appliquer une méthode analogue à celle utilisée en B 1. b.).  
 c. Étudier la limite de  $g_2$  en  $+\infty$ .  
 d. Tracer, sur un même graphique, la courbe représentative  $C_1$  de  $g_1$  sur  $\left[\frac{2}{\pi}; +\infty\right]$ , et la courbe représentative  $C_2$  de  $g_2$  sur  $\left[\frac{1}{\pi}; +\infty\right]$ .

On précisera en particulier les coordonnées du point d'intersection de  $C_1$  et  $C_2$ .

3. On considère le point mobile  $M_t$ , dont les coordonnées à l'instant  $t$ , dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  sont données par :  $x = g_1(t)$ ,  $y = g_2(t)$ ,  $g_1$  et  $g_2$  étant les fonctions vues ci-dessus, et on étudie son mouvement pour  $t \in \left[\frac{2}{\pi}; \frac{4}{\pi}\right]$ .
- a. On désigne par  $\vec{V}_t$ , le vecteur vitesse et  $\vec{\Gamma}_t$  le vecteur accélération à l'instant  $t$ . Comparer  $\vec{V}_t$ ,  $\vec{\Gamma}_t$  et  $\vec{OM}_t$ .  
 Calculer le produit scalaire  $\vec{V}_t \cdot \vec{\Gamma}_t$ . Qu'en déduit-on quant à la nature du mouvement?
- b. Construire la trajectoire de  $M_t$ . Préciser les vecteurs  $\vec{V}_t$  et  $\vec{\Gamma}_t$  pour  $t = \frac{2}{\pi}$  et pour  $t = \frac{4}{\pi}$ .