Durée : 4 heures

Baccalauréat C La Réunion juin 1988

EXERCICE 1

Soit θ un réel tel que : $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
La suite (u_n) est définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 2\cos\theta \\ u_{n+1} & = & \sqrt{2+u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{array}\right.$$

1. Calculer les trois premiers termes de la suite en fonction de θ. (On rappelle que, pour tout réel x, on a : $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.)
2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right).$$

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{\theta}{2^n}$.
   Déterminer la limite de la suite (v_n).
4. En déduire que (u_n) est convergente ; quelle est sa limite ?

EXERCICE 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$, on donne les points A, B et C de coordonnées respectives $(2~;~0~;~1)$, $(3~;~-2~;~0)$, $(2~;~8~;~-4)$. Aucune figure n'est demandée.

1. Un point M étant de coordonnées $(x~;~y~;~z)$, exprimer en fonction de x, y et z les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{\text{A}M} \wedge \overrightarrow{\text{B}M}$.
2. Résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{lcr} -x+y-2z & = & -4 \\ -x-y-z & = & -11 \\ 2x+y-z & = & 8 \end{array}\right.$$

   On fera figurer les étapes de la résolution sur la copie.
3. Montrer qu'il existe un unique point N vérifiant $\overrightarrow{\text{A}N} \wedge \overrightarrow{\text{B}N} = \overrightarrow{\text{C}N}$ et donner les coordonnées du point N.
4. On rappelle que le volume d'un tétraèdre s'obtient par la formule $V = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ représente l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.
   Le point N étant défini à la question précédente, montrer que le volume du tétraèdre ABCN est égal à $\dfrac{1}{6}\text{C}N^2$.

EXERCICE 3

Pour chaque entier naturel n, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que l'on définit ainsi une suite (u_n), chaque terme étant positif ou nul.
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
   En déduire qu'elle converge.
3. Déterminer un réel a vérifiant : $\dfrac{1}{1+2x+4x^2} \leqslant a$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).