

♣ Baccalauréat C La Réunion septembre 1977 ♣

EXERCICE 1

3 POINTS

Déterminer deux entiers naturels a et b tels que leur plus petit commun multiple soit 120 et la somme de leurs carrés 801.

EXERCICE 2

5 POINTS

Dans un plan affine euclidien \mathcal{P} , on donne un cercle (C) , centré en un point O , dont un diamètre est appelé $[AA']$.

Autres données :

(D) , tangente en A' à (C) ,

P , un point de (C) , distinct de A et A' ,

(Δ) , médiatrice de (A, P) ,

s , la symétrie orthogonale d'axe (Δ) ,

Q , le point d'intersection de la droite (D) avec la tangente en P à (C) ,

t , la translation de vecteur directeur \overrightarrow{OQ} ,

M , l'image de A dans la translation $t : M = t(A)$.

1. Démontrer que les points A, P, M sont alignés.
2. Démontrer qu'il existe deux isométries vectorielles du plan vectoriel π associé à \mathcal{P} , qui transforment \overrightarrow{QM} en \overrightarrow{OP} . En préciser la nature et les éléments.
3. Déterminer la nature et les éléments de l'application ponctuelle φ telle que $t = \varphi \circ s$.
4. Démontrer qu'il existe deux isométries affines, dont on précisera les éléments, qui transforment le bipoint (Q, M) en le bipoint (O, P) . L'une d'elles est une rotation dont le centre sera appelé I .
5. Montrer que le point I appartient à une parabole indépendante de la position du point P sur le cercle (C) .

PROBLÈME

12 POINTS

\mathbb{R} désigne le corps des réels, E l'ensemble des applications continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

E étant muni d'une addition notée $+$, telle que pour tout couple (f, g) , élément de E^2 , et pour tout x réel,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

et d'une multiplication par un réel notée \cdot , telle que pour tout f , élément de E , pour tout k réel, pour tout x réel,

$$(k \cdot f)(x) = kf(x),$$

On admettra que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

À toute application f , élément de E , on associe la fonction F telle que, pour tout x réel,

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt. \quad (1)$$

L'objet de ce problème est de proposer l'étude de

- quelques propriétés des fonctions F ,
- quelques propriétés de l'application T qui, à f , associe F ,
- quelques fonctions F particulières.

N. B. Les parties B, C et D de ce problème sont totalement indépendantes les unes des autres. Le candidat les traitera dans l'ordre de son choix. Toute réponse non correctement justifiée sera considérée comme nulle.

Partie A

1. On désigne par \mathcal{F} la fonction telle que, pour tout X réel,

$$\mathcal{F}(X) = \int_0^X f(t) dt.$$

Démontrer que \mathcal{F} appartient à E et possède une dérivée continue sur \mathbb{R} .

2. Soit la fonction $v_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto X$ tel que $X = x + a$, où a est réel donné. Démontrer que la fonction composée,

$$\mathcal{F} \circ v_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto (\mathcal{F} \circ v_a)(x) = \int_0^{x+a} f(t) dt,$$

appartient à E et possède une dérivée *continue*, telle que pour tout x réel,

$$(\mathcal{F} \circ v_a)'(x) = f(x + a).$$

3. En déduire que F , définie ci-dessus par (1), appartient à E et possède une dérivée continue, telle que, pour tout x réel,

$$F'(x) = \frac{1}{2}[f(x+1) - f(x-1)]$$

Partie B

1. Vérifier que l'application T est un endomorphisme de E . Dans la suite, on utilisera la notation $F = T(f)$.
2. Soit $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x - 1|$. G appartient-elle à E ? G est-elle dérivable sur \mathbb{R} ?
Existe-t-il g , élément de E , telle que $T(g) = G$?
L'application T est-elle surjective?
3. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin \pi x$. Déterminer $H = T(h)$. L'application T est-elle injective?
4. On appelle E_3 le sous-espace vectoriel de E , ensemble des fonctions polynômes de degré deux au plus. Montrer que E_3 est stable par T . On note \hat{F} l'application de E_3 dans E_3 définie par

$$\hat{F} : f \mapsto T(f).$$

T est-elle bijective?

Partie C

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto |t|$. φ appartient-elle à E ?

1. Démontrer que $\Phi = T(\varphi)$ est donnée par les formules :

$$\Phi(x) = |x| \quad \text{pour } |x| \geq 1 \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \frac{1}{2}(1+x^2) \quad \text{pour } |x| \leq 1.$$

En les rapportant à un même repère, représenter graphiquement φ et Φ .

2. Démontrer que, pour tout x réel, $|x| \leq \Phi(x)$ et $\frac{1}{2} \leq \Phi(x)$, ainsi que, pour tout x réel tel que $|x| \leq 1$, $\frac{1}{2} \leq \Phi(x) \leq 1$.
3. En distinguant les deux cas :

$$|u+v| \geq 1 \quad \text{et} \quad |u+v| \leq 1,$$

démontrer que quels que soient u et v réels,

$$\Phi(u) + \Phi(v) \geq \Phi(u+v).$$

Partie D

Soit $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{2}{1+|t|}$. ω appartient-elle à E ?

Dessiner la courbe représentative de ω , rapportée à un repère orthonormé.

Démontrer que $\Omega = T(\omega)$ est donnée par les formules :

$$\Omega(x) = \text{Log}(4-x^2) \quad \text{pour } |x| \leq 1$$

et

$$\Omega(x) = \text{Log}\left(1 + \frac{2}{|x|}\right) \quad \text{pour } |x| \geq 1.$$