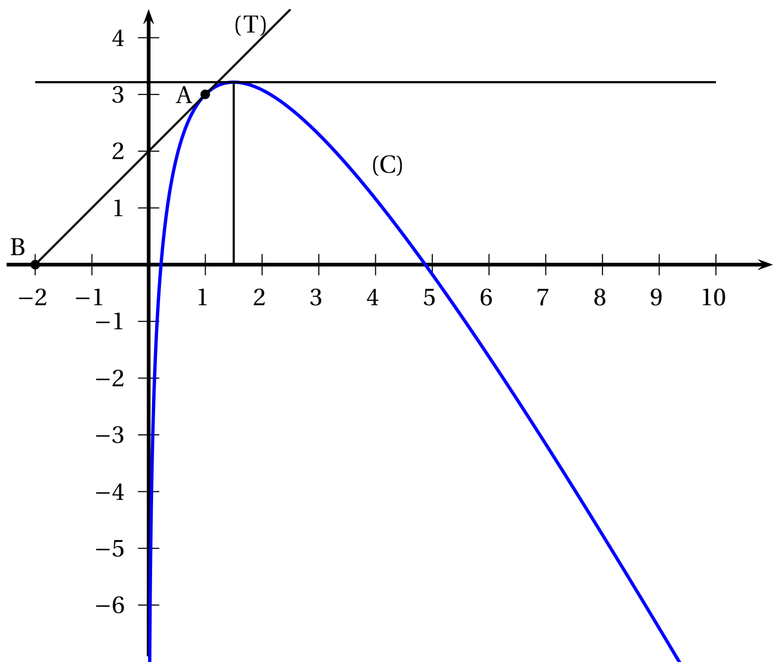
Baccalauréat ES La Réunion juin 1997

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

La fonction f est définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = a\ln(x) + bx + c$$

où a, b, c désignent des nombres réels que l'on cherche à déterminer.
La courbe (C) représente la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.



Il est précisé que :

— le point A(1 ; 3) appartient à (C) ;
— la droite T, tangente à (C) au point A, passe par le point B(−2 ; 0) ;
— f admet un maximum en $x = \dfrac{3}{2}$ et la tangente à (C) au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$ est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

2. **a.** Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

b. À l'aide des informations fournies, démontrer que les réels a et b vérifient le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} a+b & = & 1 \\ 2a+3b & = & 0 \end{array}\right.$$

En déduire les valeurs de a et b.

c. Démontrer que $c = 5$.

3. On pose $g(x) = x(3\ln(x) - x + 2)$ pour tout x appartenant à $]0~;~+\infty[$

a. Démontrer que g est une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$.

b. En déduire la valeur exacte, en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan comprise entre (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

On s'intéresse dans cet exercice aux abonnés d'un magazine. Une enquête porte sur les abonnés de l'année en cours. Ils sont de deux types :

— les nouveaux abonnés (25 %) ;
— les anciens abonnés (75 %).

Cette enquête a démontré que ces abonnés ont choisi l'une des deux formules dans les proportions suivantes :

	Nouveaux abonnés	Anciens abonnés
Abonnement de 6 mois	37 %	28 %
Abonnement d'un an	63 %	72 %

Un sondage téléphonique est effectué auprès des lecteurs abonnés.
On désigne par N l'évènement : « le lecteur interrogé est un nouvel abonné ».
On désigne par S l'évènement : « le lecteur interrogé a souscrit un abonnement de 6 mois ».

1. Calculer la probabilité des évènements :
— A : « le lecteur est un nouvel abonné et a souscrit l'abonnement d'un an » ;
— B : « le lecteur est un ancien abonné et a choisi l'abonnement de 6 mois » ;
— C : « le lecteur s'est abonné pour un an ».

2. D'après les estimations, 40 % des nouveaux abonnés et 80 % de anciens reprendront un abonnement une fois terminé l'abonnement en cours.

a. Montrer que la probabilité qu'un lecteur abonné se réabonne est égale à $0,7$.

b. Sachant que le lecteur interrogé se réabonne, quelle est la probabilité qu'il fasse partie des nouveaux abonnés ? (Donner la valeur exacte)

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Voici la liste des quinze pays composant l'Union européenne avec, pour chacun d'eux, la date d'entrée dans l'Union :
Allemagne (1958) ; Autriche (1995) ; Belgique (1958) ; Danemark (1973) ; Espagne (1986) ; Finlande (1995) ; France (1958) ; Grèce (1981) ; Irlande (1973) ; Italie (1958) ; Luxembourg (1958) ; Pays-Bas (1958) ; Portugal (1986) ; Royaume-Uni (1973) ; Suède (1995).
Pour représenter l'Union européenne à une conférence internationale, on décide de choisir au hasard deux pays délégués. Pour cela, on place dans une urne quinze jetons portant chacun le nom d'un pays de l'Union et on tire simultanément deux jetons de l'urne.
Les résultats des questions 1, 2 et 3 seront donnés sous forme fractionnaire, les résultats de la question 4 seront donnés sous forme décimale arrondie à 10^{-3} près.

1. Quelle est la probabilité pour que la France soit choisie ?

2. Sachant que les deux pays choisis font partie de l'Union depuis 1958, quelle est la probabilité pour que la France soit choisie ?

3. Soit X la variable aléatoire associant, à chaque tirage de deux jetons, le nombre de pays faisant partie de l'Union depuis 1958.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

4. Dans cette question, on choisit les délégués pour les cinq prochaines années. Pour cela on tire au hasard cinq fois de suite. deux jetons simultanément, les jetons étant remis dans l'urne avant chaque nouveau tirage.

a. Quelle est la probabilité pour que la France fasse partie de la délégation deux années exactement ?

b. Quelle est la probabilité pour que la France fasse partie de la délégation au moins une année ?

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau ci-dessous rend compte de l'évolution de la population d'une ville moyenne au cours des cinq dernières années :

Année	1992	1993	1994	1995	1996
Rang : x_i	0	1	2	3	4
Nombre d'habitants (en milliers) : z_i	58	59,04	59,88	60,55	61,1
$y_i = z_i - 58$	0	1,04	1,88	2,55	3,1

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques, 2,5 cm pour une unité en abscisse et 2,5 cm pour 1 millier d'habitants en ordonnée.
On construira sur le même dessin les différentes représentation graphiques demandées dans ce problème.

Partie A

1. Représenter le nuage de points associés à la série statistique $\left(x_i ; y_i\right)$.

2. a. Déterminer à 10^{-2} près une valeur approchée du coefficient de corrélation linéaire de la série $\left(x_i ; y_i\right)$ (on ne donnera pas le détail des calculs).
Expliquer pourquoi un ajustement linéaire semble justifié ici.

b. Déterminer une équation de la droite (Δ), droite de régression de y en x, et construire cette droite.

c. Calculer une estimation de la population de cette ville pour l'année 1998.

3. On appelle taux annuel de croissance pour l'année n, le pourcentage d'accroissement de la population entre l'année n et l'année $n+1$.
Calculer, en arrondissant à 10^{-2} près les taux annuels de croissance pour 1992, 1993, 1994 et 1995.

Partie B

Une modélisation prenant en compte une évolution du taux annuel de croissance analogue à celle des quatre dernières années amène à envisager la fonction f définie par :

$$f(x) = 5,3\left(1 - \mathrm{e}^{x \ln 0,8}\right)$$

pour $x \in [0 ; +\infty[$.
Selon ce modèle, pour une valeur entière de x, $f(x)+58$ représente la population pour l'année $1992+x$ (en milliers d'habitants).

1. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que :
$f'(x) > 0$ pour tout x de $[0 ; +\infty[$.

b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
En déduire l'existence d'une asymptote (D) à la courbe (C) représentant la fonction f.
Donner l'équation réduite de cette droite.

c. Dresser le tableau de variation de f.

d. Construire la courbe (C) et la droite (D) sur le dessin de la partie A.

2. **a.** D'après l'étude précédente, conclure sur la façon selon laquelle évolue la population de la ville suivant ce modèle.

b. Donner une estimation de la population pour 1998 à 10 habitants près.