

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S La Réunion 22 juin 2010 ∞

A. P. M. E. P.

EXERCICE 1

6 points

Commun à tous les candidats

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $] -1 ; +\infty[$  par

$$f(x) = 1 + \ln(1 + x).$$

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On note  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $y = x$ .

Partie A

1. a. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$ .  
b. Déterminer les limites de la fonction  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
2. On désigne par  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $] -1 ; +\infty[$  par

$$g(x) = f(x) - x.$$

- a. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ .
- b. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .
- c. Étudier le sens de variation de la fonction  $g$ , puis dresser le tableau de variations de la fonction  $g$ .
- d. Montrer que sur l'intervalle  $] -1 ; +\infty[$  l'équation  $g(x) = 0$  admet exactement deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$ , avec  $\alpha$  négative et  $\beta$  appartenant à l'intervalle  $[2; 3]$ .
- e. À l'aide des questions précédentes, déterminer le signe de  $g(x)$ . En déduire la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  et de la droite  $\mathcal{D}$ .

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout nombre entier naturel  $n$  par : 
$$\begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = f(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout nombre entier naturel  $n$ ,  $2 \leq u_n \leq \beta$ .
2. La suite  $(u_n)$  est-elle convergente? Justifier la réponse.

**EXERCICE 2****4 points****Commun à tous les candidats**

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

**Partie I**

On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges.

Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

1. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires.
2. Soit l'évènement  $C$  : « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ».  
Démontrer que la probabilité de l'évènement  $C$  est égale à  $\frac{7}{18}$ .
3. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.
4. À l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, quelle est la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes ?

**Partie II**

On dispose d'un second dé cubique B équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires.

Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B ;

- si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé B et on note la couleur de la face obtenue ;
- si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.

1. **a.** Construire un arbre de probabilités traduisant cette situation.  
**b.** Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?
2. Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à  $\frac{4}{9}$ .
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?

**EXERCICE 3****5 points****Commun à tous les candidats**

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

**Partie A**

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions  $f$ , définies et dérivables sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ , vérifiant la condition (E) :

$$\text{pour tout nombre réel } x \text{ strictement positif, } xf'(x) - f(x) = x^2e^{2x}.$$

1. Montrer que si une fonction  $f$ , définie et dérivable sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ , vérifie la condition (E), alors la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  vérifie :

$$\text{pour tout nombre réel } x \text{ strictement positif, } g'(x) = e^{2x}.$$

2. En déduire l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  qui vérifient la condition (E).
3. Quelle est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  qui vérifie la condition (E) et qui s'annule en  $\frac{1}{2}$ ?

### Partie B

On considère la fonction  $h$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par

$$h(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{e}{2}x.$$

On désigne par  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel positif  $x$ , le signe de  $h(x)$ .
2. a. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale  $\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x} dx$  et en déduire  $\int_0^{\frac{1}{2}} h(x) dx$ .
- b. En déduire, en unité d'aire, la valeur exacte de l'aire de la partie du plan située en dessous de l'axe des abscisses et au dessus de la courbe  $\mathcal{C}$ .

### EXERCICE 4

5 points

#### Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

##### Partie I : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives  $a, b, c$ .

On suppose que A et B sont distincts, ainsi que A et C.

On rappelle que  $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(b - a) \quad [2\pi]$ .

Montrer que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) \quad [2\pi]$ .

##### Partie II

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère le point A d'affixe  $1 + i$ .

On associe, à tout point M du plan d'affixe  $z$  non nulle, le point  $M'$  d'affixe

$$z' = \frac{z - 1 - i}{z}.$$

Le point  $M'$  est appelé le point image du point M.

1. **a.** Déterminer, sous forme algébrique, l'affixe du point  $B'$ , image du point  $B$  d'affixe  $i$ .
- b.** Montrer que, pour tout point  $M$  du plan d'affixe  $z$  non nulle, l'affixe  $z'$  du point  $M'$  est telle que  $z' \neq 1$ .
2. Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan d'affixe  $z$  non nulle pour lesquels l'affixe du point  $M'$  est telle que  $|z'| = 1$ .
3. Quel est l'ensemble des points  $M$  du plan d'affixe  $z$  non nulle pour lesquels l'affixe du point  $M'$  est un nombre réel?

**EXERCICE 4****5 points****Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité****Partie I : Restitution organisée de connaissances**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

**Prérequis :**

On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude directe du plan est de la forme  $z' = \alpha z + \beta$ , où  $\alpha$  est un nombre complexe non nul et  $\beta$  est un nombre complexe.

Soient  $A, B, C, D$  quatre points du plan; on suppose d'une part que les points  $A$  et  $C$  sont distincts et d'autre part que les points  $B$  et  $D$  sont distincts.

Démontrer qu'il existe une unique similitude directe  $s$  telle que  $s(A) = B$  et  $s(C) = D$ .

**Partie II**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct  $(A; \vec{AB}, \vec{AD})$ ;

$$(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi].$$

On considère le point  $C$  tel que  $ABCD$  est un carré.

Soit  $E$  le milieu du segment  $[AD]$ , on considère le carré  $EDGF$  tel que

$$(\vec{ED}, \vec{EF}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi].$$

1. **a.** Faire une figure en plaçant les points  $A, B, C, D, E, F, G$ . On complètera la figure au cours de l'exercice.
- b.** Préciser les nombres complexes  $a, b, c, d, e, f, g$ , affixes respectives des points  $A, B, C, D, E, F$  et  $G$ .
- c.** Montrer qu'il existe une unique similitude directe  $s$  du plan telle que  $s(D) = F$  et  $s(B) = D$ .
2. On se propose de préciser les éléments caractéristiques de la similitude directe  $s$ .
  - a.** Déterminer le rapport  $k$  et l'angle  $\theta$  de la similitude directe  $s$ .
  - b.** Donner l'écriture complexe de cette similitude.
  - c.** Déterminer, le centre  $\Omega$  de la similitude directe  $s$ .