

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Laos septembre 1968 ∞

EXERCICE 1

En remarquant que l'on a $10^3 - 1 = 9 \times 111$ et $10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13$:

1. démontrer que le nombre

$$A = 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1 \quad (n \text{ entier positif})$$

est divisible par 111 quel que soit n et qu'il est également divisible par 7 et 13 si n est impair.

2. démontrer que le nombre

$$B = 109n + 106n + 103n + 1$$

est divisible par 7, 11 et 13 si n est impair et, dans les autres cas, déterminer le reste de la division de ce nombre par 7, 11, 13 et 111.

EXERCICE 2

Soit une ellipse (E); O est son centre, F et F' ses foyers, A et A' les sommets du grand axe, B et B' les sommets du petit axe;

$$FF' = 2R \quad \text{et} \quad AA' = 2R\sqrt{2}.$$

1. Soit (D) et (D') les tangentes à (E) respectivement en B et B'. La deuxième tangente à (E) issue d'un point M de (D) coupe (D') en P'. Indiquer la construction de cette tangente et montrer que

$$(MB, MF') = (MF, MP) + k\pi$$

(k entier positif, négatif ou nul). En déduire que MP' est tangente au cercle circonscrit au triangle MFF'.

2. Montrer que le cercle de diamètre MP' est orthogonal à tout cercle passant par F et F'.
3. Quelles sont, par rapport au cercle (O) de centre O et de rayon R , les polaires de M et de P'? Q étant le deuxième point d'intersection de (O) avec BP', B'Q coupe (D) en P. Montrer que M est le milieu de BP; MP' coupe B'P en R et BB' en S. Montrer que R et S sont conjugués harmoniques par rapport à M et P'. En déduire que S, F, F' et R appartiennent à un même cercle et que R est le point de contact de MP' avec (E).