

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1975 Laos ∞

EXERCICE 1

$A$  est un entier naturel qui s'écrit dans le système décimal :

$$\overline{r_n r_{n-1} \cdots r_2 r_1 r_0}$$

1. Ayant écrit  $A$  sous la forme  $10K + r_0$  où  $K$  est un entier naturel, montrer que  $5A$  est congru à  $5r_0 - K$  modulo 17.
2. Montrer que  $A$  est divisible par 17 si et seulement si  $5r_0 - K$  est divisible par 17.

EXERCICE 2

Dans un plan affine euclidien, on considère le triangle équilatéral  $ABC$ , Le milieu  $I$  du bipoint  $(B, C)$  se projette orthogonalement en  $H$  sur la droite  $AB$ .

1. Démontrer que  $H$  est le barycentre des points  $A$  et  $B$  affectés respectivement des coefficients 1 et 3.
2. Soit  $G$  le barycentre des points  $A, B, C$  affectés respectivement des coefficients 1, 5, 2; montrer que  $G$  est le milieu du bipoint  $(I, H)$ .

PROBLÈME

$E$  est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  $\lambda$  est un nombre réel non nul. On considère les applications  $h$  et  $p$  de  $E$  dans  $E$  qui au point  $M$  de coordonnées  $(x; y)$  associent respectivement les points de coordonnées  $(\lambda x; \lambda y)$  et  $(0; y - x)$ .

Partie A

Dans cette première partie  $\lambda$  est donné

1. Caractériser chacune des applications  $h$  et  $p$ . Sont-elles des bijections de  $E$  dans  $E$ ?
2. On note  $N$  l'image de  $M$  par  $h \circ p$ . À tout point  $M$  de  $E$  on associe le point  $P$  tel que le vecteur  $\overrightarrow{OP}$  soit égal au vecteur  $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ .

On désigne par  $\mathcal{A}_\lambda$  l'application de  $E$  vers  $E$  qui, au point  $M$ , fait correspondre le point  $P$ .

Montrer que les coordonnées  $(X; Y)$  de  $P$  s'expriment, en fonction de celles de  $M$ , par :

$$\begin{cases} X = x \\ Y = (\lambda + 1)y - \lambda x \end{cases}$$

À quelle condition  $\mathcal{A}_\lambda$  est-elle bijective?

**Partie B**

À chaque  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$  on associe l'application  $\mathcal{A}_\lambda$

Soit  $A$  l'ensemble des applications  $\mathcal{A}_\lambda$  bijectives, et  $\text{Id}_E$  l'application de  $E$  vers  $E$  qui à  $M$  associe  $M$  lui-même. Montrer que  $A \cup \{\text{Id}_E\}$  muni de la loi de composition des applications est un groupe commutatif.

**Partie C**

Dans cette question  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$  est donné

1. Quel est l'ensemble des points invariants par  $\mathcal{A}_\lambda$  ?
2. Soit  $(D)$  la droite d'équation :  $ux + vy + w = 0$ .  
Démontrer que l'ensemble des images par  $\mathcal{A}_\lambda$  des points de  $(D)$  est en général une droite  $(D')$ ; on dira avec précision dans quel cas il n'en est pas ainsi.
3. Trouver toutes les droites invariantes par  $\mathcal{A}_\lambda$ .

**Partie D**

Dans toute la partie, on suppose que  $\lambda$  est égal à 1

1. Écrire une équation de l'ensemble  $(\gamma)$  des images par  $\mathcal{A}_1$  des points du cercle de centre  $O$  et de rayon 1.
2. Soit  $(\Delta_m)$  la droite d'équation :  $mx - y = 0$ .  
Montrer que  $(\Delta_m) \cap (\gamma)$  n'est pas vide. Soit  $M$  de coordonnées  $(x; y)$  un point de cette intersection. Exprimer  $OM^2$  en fonction de  $m$ .
3. Étudier les variations de la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  telle que :

$$f(m) = OM^2$$

(On ne demande pas la représentation graphique).

4. On admettra que  $(\gamma)$  est une conique; déduire de l'étude précédente la nature de cette conique.  
Donner son équation réduite et son excentricité.