BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

A. P. M. E. P.

SOUS ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

Comptabilité et gestion des organisations de 2001 à 2011

Brevet de technicien supérieur Nouvelle-Calédonie Comptabilité et gestion décembre 2000

Exercice 1 **11 points**

On considère un produit dont le prix unitaire, exprimé en euros, est noté x.
La demande $f(x)$ est la quantité de ce produit, exprimée en centaines d'unités, que les consommateurs sont prêts à acheter au prix unitaire de x euros.
L'offre $g(x)$ est la quantité de ce produit, exprimée en centaines d'unités, que les producteurs sont prêts à vendre au prix unitaire de x euros.
On appelle prix d'équilibre de ce produit le prix pour lequel l'offre et la demande sont égales. L'objectif de cet exercice est de déterminer un prix d'équilibre.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Partie 1 : étude statistique

Pour cette partie, on utilisera les fonctions de la calculatrice. Le détail des calculs n'est pas demandé.
Une étude statistique a permis de relever les résultats suivants, où x_i représente le prix de vente unitaire en euro et y_i la quantité demandée, en centaines d'unités, de ce produit.

Prix unitaire en euros x_i	1,1	1,25	1,4	2	2,45	3
Quantité en centaines y_i	9,75	5,50	4,50	3,00	2,60	2,50

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques : 5 cm pour 1 euro en abscisse et 1 cm pour 1 centaine d'unités en ordonnée. Le nuage de points M_i, de coordonnées $\left(x_i ; y_i\right)$ est représenté sur la feuille annexe. Vu la disposition des points, on ne cherche pas à remplacer ce nuage par une droite, c'est-à-dire à réaliser un ajustement affine.
On effectue le changement de variable $Y_i = \ln y_i$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Compléter le tableau de valeurs donné sur la feuille annexe, sous le nuage de points : les valeurs de Y_i seront arrondies à 10^{-2} près.
2. Donner le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique $(x, ; Y_i)$. On en donnera la valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut.

   Le résultat trouvé permet d'envisager un ajustement affine.
3. Donner, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de Y en x sous la forme $Y = ax + b$; on donnera la valeur décimale approchée de a à 10^{-2} près par défaut, b sera arrondi à l'entier le plus proche.
4. En déduire une estimation de la quantité demandée y_i en centaines d'unités, en fonction du prix unitaire x, sous la forme $y = k\text{e}^{-\lambda x}$ où k et λ sont des constantes ; k sera arrondi à l'entier le plus proche.
5. En déduire la quantité demandée que l'on peut estimer pour un prix unitaire de 2,90 euros. On donnera la valeur arrondie à une unité près.

Partie 2 : recherche du prix d'équilibre

Dans cette partie, on considère que la demande, exprimée en centaines d'unités, pour un prix unitaire de x euros est $f(x)$, où f est la fonction définie sur l'intervalle $[1 ; 3]$ par

$$f(x) = 20\text{e}^{-0,7x}$$

De même, l'offre, exprimée en centaines d'unités, pour un prix unitaire de x euros est $g(x)$, où g est la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,3]$ par :

$$g(x) = 0,15x + 2,35.$$

1. On désigne par f' la fonction dérivée de f.

a. Calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,3]$.

b. Sur le graphique donné en annexe, tracer les représentations graphiques $\mathscr{C}$ et Δ des fonctions f et g.

c. Déterminer graphiquement, en faisant figurer les tracés utiles, une valeur approchée, arrondie à 10^{-1} près, de l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}$ et Δ.

2. Soit la fonction h définie sur l'intervalle $[1\,;\,3]$ par

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

a. Étudier le sens de variations de la fonction h, sur l'intervalle $[1\,;\,3]$.

b. En déduire, en justifiant, que l'équation $h(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[1\,;\,3]$ une solution unique, notée α, dont on donnera la valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut.

Vérifier que cette valeur est compatible avec la valeur lue sur le graphique au 1. c.

c. Donner, à 10^{-2} près, le prix d'équilibre en euros, c'est-à-dire le prix pour lequel l'offre et la demande sont égales.
Calculer l'offre correspondant au prix d'équilibre.

Exercice 2 **9 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une centrale d'achat fournit trois types de poulets à une chaîne d'hypermarchés :

– des poulets « biologiques », dits poulets P_1 ;
– des poulets de Bresse, dits poulets P_2 ;
– des poulets élevés en plein air, dits poulets P_3.

Une étude de marché a montré qu'un poulet se vend mal lorsque son poids est inférieur ou égal à 1 kilogramme.
Avant leur conditionnement et leur mise en vente en grande surface, les poulets sont stockés dans un entrepôt frigorifique. Dans la suite, on s'intéresse aux stocks de ces trois types de poulets, une journée donnée.

Partie 1 : étude des poulets P_1

On note X la variable aléatoire qui, à chaque poulet prélevé au hasard dans le stock de poulets P_1, associe son poids en kg.
On admet que X suit la loi normale de moyenne $1,46$ et d'écart-type $0,30$.
Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité de l'évènement A « un poulet prélevé au hasard dans le stock de poulets P_1 a un poids inférieur ou égal à 1 kg ».

Partie II : étude des poulets P_2

On note B l'évènement « un poulet prélevé au hasard dans le stock de poulets P_2 a un poids inférieur ou égal à 1 kg ».
On suppose que la probabilité de l'évènement B est $0,03$.

On prélève au hasard 100 poulets dans le stock de poulets. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 poulets.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 100 poulets ainsi défini, associe le nombre de poulets ayant un poids inférieur ou égal à 1 kg.

1. Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale. En déterminer les paramètres.
2. On approche la loi de la variable aléatoire Y par la loi de Poisson de même espérance mathématique.
   Donner le paramètre de cette loi.
3. Utiliser cette approximation pour calculer, à 10^{-2} près, la probabilité de l'évènement « parmi 100 poulets prélevés au hasard dans le stock de poulets P_2, il y a au plus 4 poulets ayant un poids inférieur ou égal à 1 kg ».

Partie 3 : étude des poulets P_3

Dans cette partie, on cherche à estimer le pourcentage p inconnu de poulets du stock de poulets P_3 dont le poids esi inférieur ou égal à 1 kg.
On considère un échantillon de 100 poulets prélevés au hasard et avec remise dans le stock de poulets P_3. On constate qu'il contient 4 poulets dont le poids est inférieur ou égal à 1 kg.

1. Donner une estimation ponctuelle du pourcentage p de poulets du stock de poulets P_3 dont le poids est inférieur ou égal à 1 kg.
2. Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 poulets prélevés au hasard et avec remise dans le stock de poulets P_3, associe le pourcentage de poulets de cet échantillon dont le poids est inférieur ou égal à 1 kg.

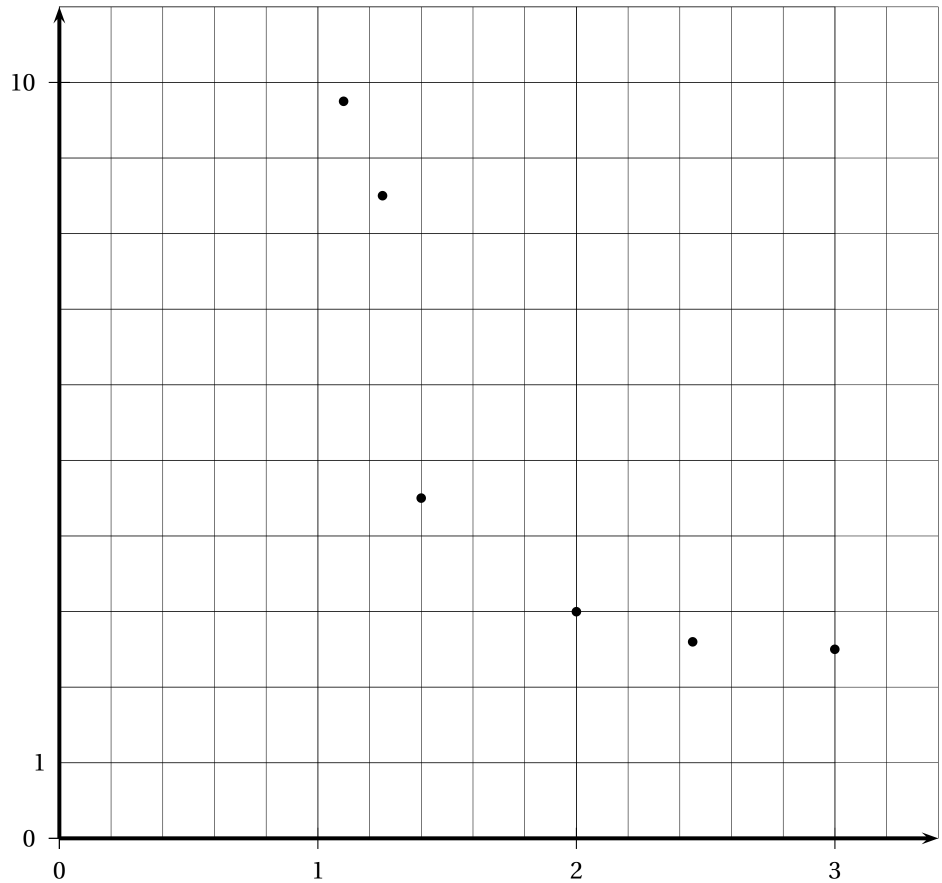
   On suppose que F suit la loi normale $\mathcal{N}\left(p\,;\ \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}}\right)$ où p est le pourcentage inconnu de poulets du stock de poulets P_3 dont le poids est inférieur ou égal à 1 kg.

   a. Déterminer un intervalle de confiance du pourcentage p avec le coefficient de confiance 95 % ; les bornes seront données à 10^{-1} près.

   b. On considère l'affirmation suivante : « le pourcentage p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question a. ». Cette affirmation est-elle vraie ?

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Représentation graphique du nuage de points de l'exercice 1



Exercice 1

Partie 1 – 1. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous : les valeurs de Y_i seront arrondies à 10^{-2} près :

x_i	1,1	1,25	1,4	2	2,45	3
$Y_i = \ln x_i$	2,28	2,14				

Brevet de technicien supérieur Comptabilité et gestion session 2001

Exercice 1

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Une entreprise de loisirs qui possède 60 bateaux les loue à la semaine. Cet exercice propose une étude de la rentabilité de cette activité pour une semaine fixée.
Les données financières sont exprimées en milliers de francs (kF) et les résultats demandés seront arrondis à 10^{-2} près.

Partie A : Étude du coût de fonctionnement hebdomadaire

Le coût de fonctionnement hebdomadaire $C(q)$, exprimé en milliers de francs, correspondant à la location d'un nombre q de bateaux est donné par :

$$C(q) = 15 + 2q - 20\ln(0,1q + 1).$$

1. **a.** Calculer $C(10)$ et $C(20)$. Le coût de fonctionnement hebdomadaire est-il proportionnel au nombre de bateaux loués ?

   b. Déterminer le pourcentage d'augmentation du coût de fonctionnement hebdomadaire lorsque le nombre de bateaux loués passe de 10 à 20.

2. Afin d'étudier le coût de fonctionnement hebdomadaire, on considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 60]$ par :

$$f(x) = 15 + 2x - 20\ln(0,1x + 1).$$

   a. Montrer que $f'(x) = \dfrac{0,2x}{0,1x + 1}$ pour tout x de l'intervalle $[0 ; 60]$. En déduire le sens de variation de f.

   b. Calculer le coût de fonctionnement hebdomadaire maximal (exprimé en milliers de francs).

Partie B : Étude du bénéfice

Chaque bateau est loué 3 000 F la semaine. Le bilan financier hebdomadaire $B(q)$, exprimé en milliers de francs, correspondant à la location d'un nombre q de bateaux est donc donné par :

$$B(q) = q + 20\ln(0,1q + 1) - 15.$$

1. Afin d'étudier ce bilan, on considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; 60]$ par :

$$g(x) = x + 20\ln(0,1x + 1) - 15.$$

   Déterminer le sens de variations de la fonction g.

2. Sur l'annexe jointe au sujet :

   a. Compléter le tableau de valeurs de la fonction g.

   b. Construire la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction g dans un repère orthogonal d'unités graphiques : 3 cm pour 10 bateaux sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 5 kF sur l'axe des ordonnées.

3. Déterminer graphiquement, en faisant figurer les tracés utiles, le nombre minimum de bateaux que l'entreprise doit louer pendant cette semaine pour obtenir :

a. Un bénéfice (positif),

b. Un bénéfice supérieur à 20 kF.

Exercice 2

Dans ce problème, on s'intéresse à une production de pots de confiture dans une usine.

Les parties A et B peuvent être traitées séparément

Partie A

On s'intéresse, dans cette partie, à la masse des pots produits.
On considère l'évènement : « un pot a une masse inférieure à 490 grammes ».
Une étude a permis d'admettre que la probabilité de cet évènement est 0,2.

1. On prélève au hasard 10 pots dans la production totale. On suppose que le nombre de pots est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 pots.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 pots, associe le nombre de pots dont la masse est inférieure à 490 grammes.

a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale.
En préciser les paramètres.

b. Calculer la probabilité de l'évènement A « parmi les 10 pots, il y a exactement 2 pots dont la masse est inférieure à 490 grammes ».

2. On prélève au hasard 100 pots dans la production totale. On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 100 pots, associe le nombre de pots dont la masse est inférieure à 490 grammes.

On admet que la loi de la variable aléatoire Y peut être approchée par une loi normale.

Soit Z une variable aléatoire suivant cette loi normale.

a. Expliquer pourquoi les paramètres de la loi de Z sont 20 et 4.

b. Calculer la probabilité de l'évènement B « parmi les 100 pots, il y a au plus 18 pots dont la masse est inférieure à 490 grammes », c'est-à-dire calculer $P(Z \leqslant 18,5)$.

c. Déterminer le plus petit entier n tel que $P(Z \leqslant n) > 0,80$.

Partie B

1. Les masses, exprimées en grammes, observées pour un échantillon de 100 pots pris au hasard et avec remise dans la production totale, ont donné les résultats suivants :

Masse en grammes	[470 ; 480[	[470 ; 480[	[490 ; 500[	[500 ; 510[	[510 ; 520[
Nombre de pots	7	13	43	27	10

a. On considère que les éléments de chaque classe sont situés en son centre. Dans cette situation, calculer la moyenne et une valeur approchée à 10^{-2} près de l'écart type de cet échantillon.

On utilisera les fonctions statistiques de la calculatrice.

   b. À partir des informations précédentes, donner une estimation ponctuelle de la moyenne μ et de l'écart type s de la production totale (pour cette dernière, on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près).

2. Le fabricant fait régler sa machine pour que la masse des pots produits soit 505 grammes.

Soit S la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 pots prélevés au hasard et avec remise dans production totale, associe la moyenne des masses des 100 pots de cet échantillon.

On admet que S suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type $\frac{s}{10}$.

On se propose de construire un test bilatéral permettant de vérifier, au seuil de signification 5 %, l'hypothèse selon laquelle la machine est correctement réglée.

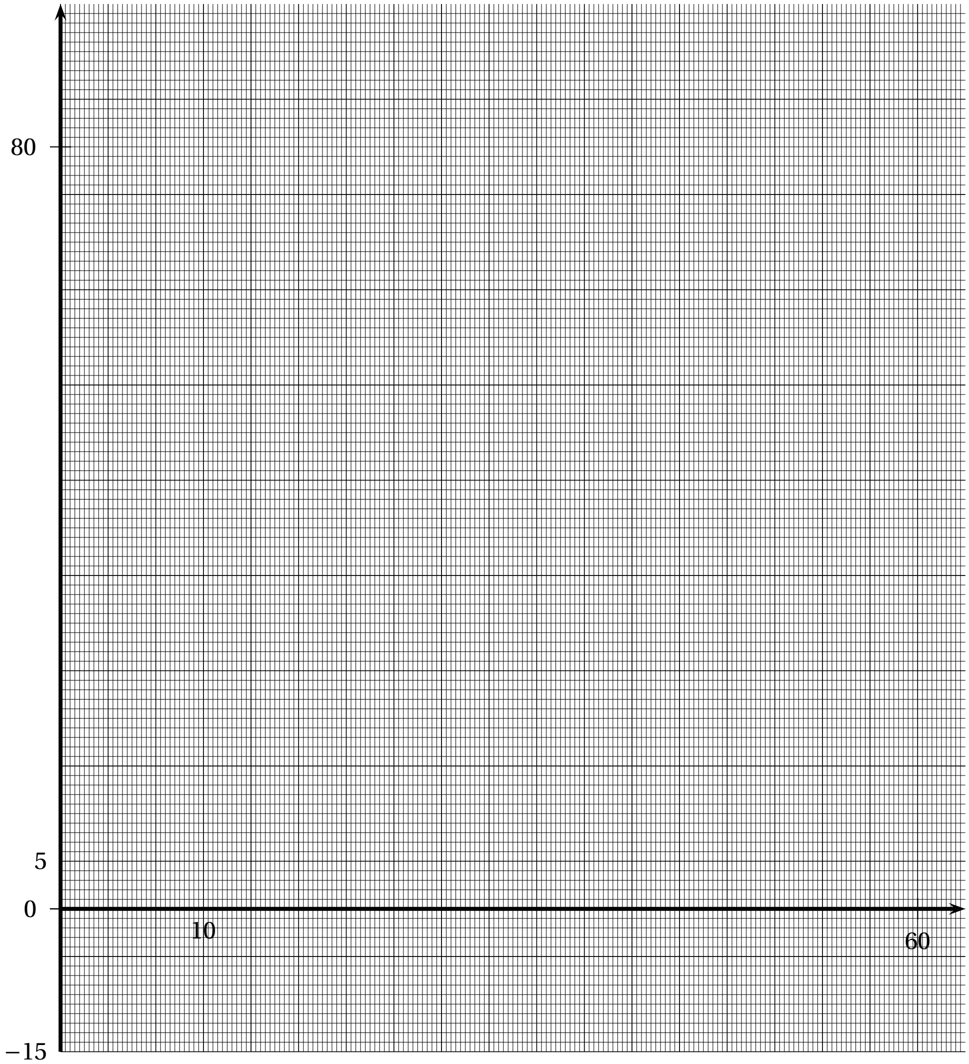
On choisit comme hypothèse nulle $\mathrm{H}_0 : \mu = 505$ et comme hypothèse alternative $\mathrm{H}_1 : \mu = 505$.

   a. Déterminer la région critique au seuil de signification 5 %.

   b. Énoncer la règle de décision.

   c. Utiliser le test avec l'échantillon de la question B. 1.
   Conclure.

ANNEXE



x	0	5	10	20	30	40	60
$g(x)$	-15			26,97			

Brevet de technicien supérieur Comptabilité et gestion des organisations session 2003 Nouvelle Calédonie octobre 2002

Exercice 1

Partie A : étude mathématique
Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[1 ; 6]$ respectivement par :

$$f(t) = 6 - \frac{9}{t+2} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{21}{5 + \mathrm{e}^{-0,8t}}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans le plan muni du repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques : 2 cm pour 1 unité en abscisse, et 10 cm pour 1 unité en ordonnée.

1. Calculer $f'(t)$ pour tout t appartenant à l'intervalle $[1 ; 6]$. En déduire le sens de variation de f.
2. a. Démontrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[1 ; 6]$, $g'(t) = \dfrac{16,8\mathrm{e}^{-0,8t}}{\left(5 + \mathrm{e}^{-0,8t}\right)^2}$.
   b. En déduire le sens de variations de g.
3. Sur la feuille donnée en annexe, compléter le tableau de valeurs de f et g (les valeurs de $f(t)$ et $g(t)$ seront arrondies à 10^{-2}).
   Construire les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
4. Résoudre algébriquement l'inéquation $g(t) \geqslant 4,15$. On donnera la valeur arrondie à 10^{-2} près de la borne inférieure de l'intervalle des solutions.
5. a. Donner une primitive de f sur l'intervalle $[1 ; 6]$.
   b. Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[1 ; 6]$, $g(t) = \dfrac{21\mathrm{e}^{0,8t}}{5\mathrm{e}^{0,8t} + 1}$.
   En déduire une primitive de g sur l'intervalle $[1 ; 6]$.
   c. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^6 f(t)\,\mathrm{d}t$. ri,
   d. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^6 g(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie B : utilisation de certains résultats pour une étude économique
Un groupe distribuant une marque d'un certain produit lance un plan de réorganisation de l'implantation des points de vente de cette marque sur une période de 6 ans. Ce plan entraîne pendant cene periode d'une part, des fermetures de points de vente et d'autre part, des ouvertures de nouveaux points de vente.

Une étude a montré que f modélise le nombre, exprimé en centaines, d'ouvertures et g le nombre, exprimé en centaines, de fermetures de points de vente.
Ainsi, $f(1)$ représente le nombre d'ouvertures au cours de la 1^{re} année,
$f(2)$ représente le nombre d'ouvertures au cours de la 2^{e} année,
$f(t)$ représente le nombre d'ouvertures au cours de la t^{e} année $(1 \leqslant t \leqslant 6)$.
De même, $g(t)$ représente le nombre de fermetures au cours de la t^{e} année
$(1 \leqslant t \leqslant 6)$.

1. L'année précédant le lancement du plan, 4 150 points de vente étaient implantés en France.

   Déterminer graphiquement, au cours de quelle année le nombre de points de vente fermés dans l'année dépasse 10 % de l'effectif initial.

   On fera figurer sur le graphique les traits de construction utiles.
2. Déterminer graphiquement, l'année au cours de laquelle le nombre de points de vente ouverts devient supérieur au nombre de points de vente fermés.
3. Expliquer comment on pourrait obtenir le nombre total de points de vente de la marque à la fin du plan de réorganisation.

Exercice 2

Un éditeur scolaire produit en grande série un CD-Rom de sujets d'examens de mathématiques corrigés, à l'intention des étudiants des sections de techniciens supérieurs. Au cours de la fabrication de ce produit, deux défauts peuvent se produire :

– le défaut a au cours de l'impression de la jaquette ;

– le défaut b au cours de l'enregistrement des données.

Les trois parties A. B et C peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

On noté A l'évènement « le CD-Rom présente le défaut a ». Une étude a montré que $p(A) = 0,08$.

1. On prélève au hasard successivement 50 CD-Roms dans le stock On admet que le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prêlèvement à un tirage avec remise de 50 CD-Roms.

   On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 CD-Roms, associe le nombre de CD-Roms présentant le défaut a.

   a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. En déterminer les paramètres.

   b. Calculer les probabilités, arrondies à 10^{-2} près, des évènements suivants :

   – « parmi les 50 CD-Roms, exactement cinq présentent le défaut a ».

   – « parmi les 50 CD-Roms, deux au moins présentent le défaut a ».
2. Le prix de vente unitaire prévu d'un CD-Rom est 18 euros. L'éditeur effectue une réduction de 15 % sur le prix de vente prévu pour les CD-Roms présentant le défaut a.

   a. Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X. Que représente $E(X)$?

   b. Déduire de la question a. la recette moyenne, arrondie à un euro, que l'éditeur peut espérer de la vente de 50 CD-Roms.

Partie B

Dans cette partie, les résultats seront donnés à 10^{-2} *près*

Les CD-Roms présentant le défaut b sont considérés comme défectueux. Lorsqu'un client se trouve en possession d'un CD-Rom défectueux, il doit le renvoyer au service après-vente de l'éditeur qui en échange, lui fait parvenir un autre CD-Rom en remplacement.

On note Y la variable aléatoire qui, à chaque client concerné prélevé au hasard, associe le nombre de jours séparant la date de renvoi du CD-Rom défectueux au service après-vente et la date de réception du CD-Rom de remplacement.

On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 8 et d'écart type 2,75.

On admet qu'un client se déclare satisfait par le service après-vente si son délai d'attente ne dépasse pas 10 jours et mécontent si ce délai dépasse 14 jours.

1. Calculer la probabilité qu'un client concerné soit satisfait du service après-vente.
2. Calculer la probabilité qu'un client concerné soit mécontent du service après-vente.

Partie C

L'éditeur met en place des services après-vente décentralisés.
Dans cette partie, on s'intéresse à un service après-vente donné.
Les résultats seront donnés à 10^{-2} *près*

Pendant une période donnée, on a relevé le délai d'attente, en jours, de chaque client de ce service après-vente.
Pour un échantillon de 100 clients prélevés au hasard et avec remise dans l'ensemble des clients de ce service pendant la période considérée, on constate que la moyenne des délais d'attente est $\overline{x} = 9$ et que l'écart-type s des délais d'attente est $s = 2,80$.

1. À partir des informations portant sur cet échantillon, donner une estimation ponctuelle de la moyenne μ et de l'écart type σ des délais d'attente de l'ensemble des clients de ce service pendant la période considérée.
2. Soit $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 clients prélevés au hasard et avec remise dans l'ensemble des clients de ce service pendant la période considérée, associe la moyenne des délais d'attente, en jours, des clients de ce service.

   On suppose que $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}$. On prendra pour σ l'estimation ponctuelle fournie à partir de l'échantillon de la question 1.

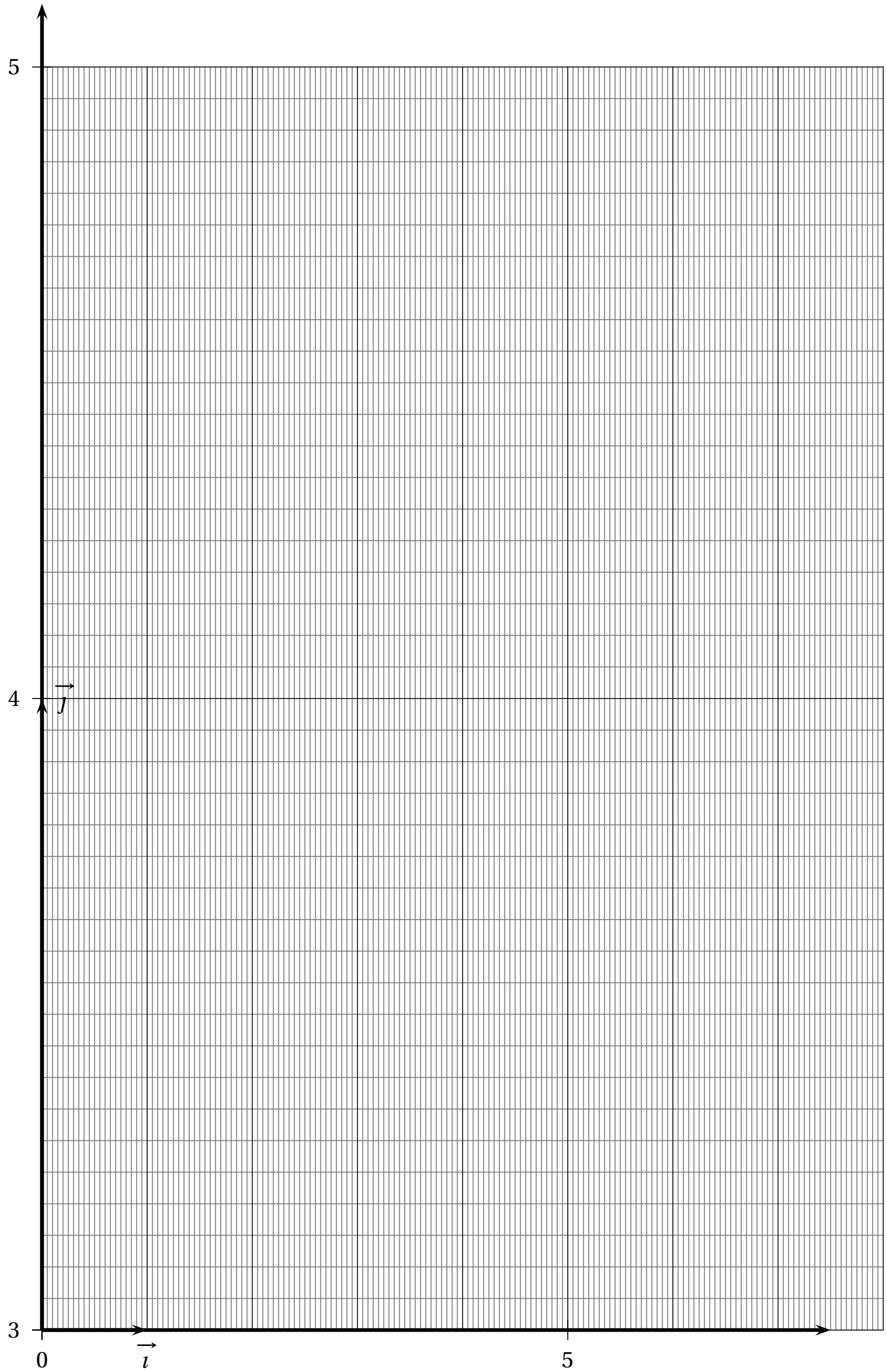
   a. Déterminer un intervalle de confiance centré en 9 de la moyenne μ des délais d'attente des clients de ce service avec le coefficient de confiance 95 %.

   b. Ce service peut-il affirmer que la moyenne des délais d'attente ne dépasse pas 10 jours ? Justifier la réponse.

ANNEXE à rendre avec la copie

Tableau de valeurs à compléter :

t	1	2	3	4	5	6
$f(t)$						
$g(t)$						



Brevet de technicien supérieur Comptabilité et gestion session 2002

Exercice 1

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante

Afin d'augmenter son chiffre d'affaires, un magasin d'appareils électroménagers réalise un investissement pour rénover son rayon des ventes et effectuer une campagne publicitaire.
Cet exercice propose une étude du coût, des recettes et du bénéfice de cette opération financière, pendant l'année qui suit sa réalisation.
Les données financières sont exprimées en milliers d'euros (k€) et les résultats demandés seront arrondis à 10^{-1} près.

Partie A étude du coût

1. Le coût de l'opération financière s'élève la fin du 1er mois à 50 k€ et à la fin du 2e mois à 46 k€.

   Calculer la diminution en pourcentage du coût entre le premier et le deuxième mois.
2. On note u_n le coût exprimé en kg de l'opération financière à la fin du n-ième mois ($1 \leqslant n \leqslant 12$), ainsi $u_1 = 50$ et $u_2 = 46$. On admet que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,92.

   Calculer u_{12}.
3. En fait le coût mensuel de l'opération financière suit une évolution légèrement différente et peut être modélisé par la fonction f définie sur $[1\,;\,12]$ par :

$$f(t) = \frac{108}{1 + \mathrm{e}^{0,15t}}.$$

   On admet que $f(t)$ représente le coût mensuel, exprimé en k€, comptabilisé à la fin du t-ième mois.

   a. Calculer $f'(t)$, pour tout t appartenant à l'intervalle $[1\,;\,12]$. En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $[1\,;\,12]$.

   b. En annexe, deux courbes sont tracées. L'une représente la fonction f.
   La reconnaître ; expliquer.

   c. Déterminer graphiquement, en faisant figurer les tracés utiles, durant quel mois le coût mensuel devient inférieur à 30 k€.

Partie B étude des recettes

On admet que le montant mensuel des recettes peut être modélisé par la fonction g définie sur l'intervalle $[1\,;\,12]$ par :

$$g(t) = 2(18 - t)\mathrm{e}^{0,1t}.$$

Ainsi $g(t)$ représente le montant des recettes, exprimées en k€, comptabilisées la fin du t-ième mois.

1. Montrer que $g'(t) = 0,2(8-t)\mathrm{e}^{0,1t}$, pour tout t appartenant à l'intervalle $[1\,;\,12]$.
   En déduire le tableau de variations de g.

2. On veut calculer l'intégrale $I = \int_1^{12} g(t)\,\mathrm{d}t$.

   a. On considère la fonction G définie par $G(t) = 20(28-t)\mathrm{e}^{0,1t}$.
   Montrer que G est une primitive de g sur l'intervalle $[1\,;\,12]$.

   b. En déduire la valeur de I.

Partie C : étude du bénéfice

1. La courbe représentant la fonction g est tracée en annexe, la reconnaître.
2. Déterminer graphiquement, à partir de quel mois l'opération financière devient bénéficiaire.

Exercice 2

Dans une station de sports d'hiver, une étude statistique est réalisée dans le but d'étudier la durée d'attente au pied des remontées mécaniques.
Dans ce problème, on s'intéresse à l'étude de la durée d'attente, exprimée en minutes, au pied d'une remonté mécanique particulière.

Partie A : étude de la durée d'attente en début de journée

On désigne par A et B les évènements suivants :
A : « la durée d'attente lors de la première montée est supérieure à 3 minutes » ;
B : « la durée d'attente lors de la deuxième montée est supérieure à 3 minutes ».
Des observations permettent d'admettre que $p(A) = 0,2$.
De plus, on constate que :

- si la durée d'attente lors de la première montée est supérieure à 3 minutes, la probabilité que la duré d'attente lors de la deuxième montée soit supérieure à 3 minutes est $0,3$;
- si la durée d'attente lors de la première montée est strictement inférieure à 3 minutes, la probabilité que la durée d'attente lors de la deuxième montée soit supérieure à 3 minutes est $0,5$.

1. a. On désigne par $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.
   Calculer les probabilités des évènements $\overline{A}$, $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$.

   b. En déduire que $p(B) = 0,46$.

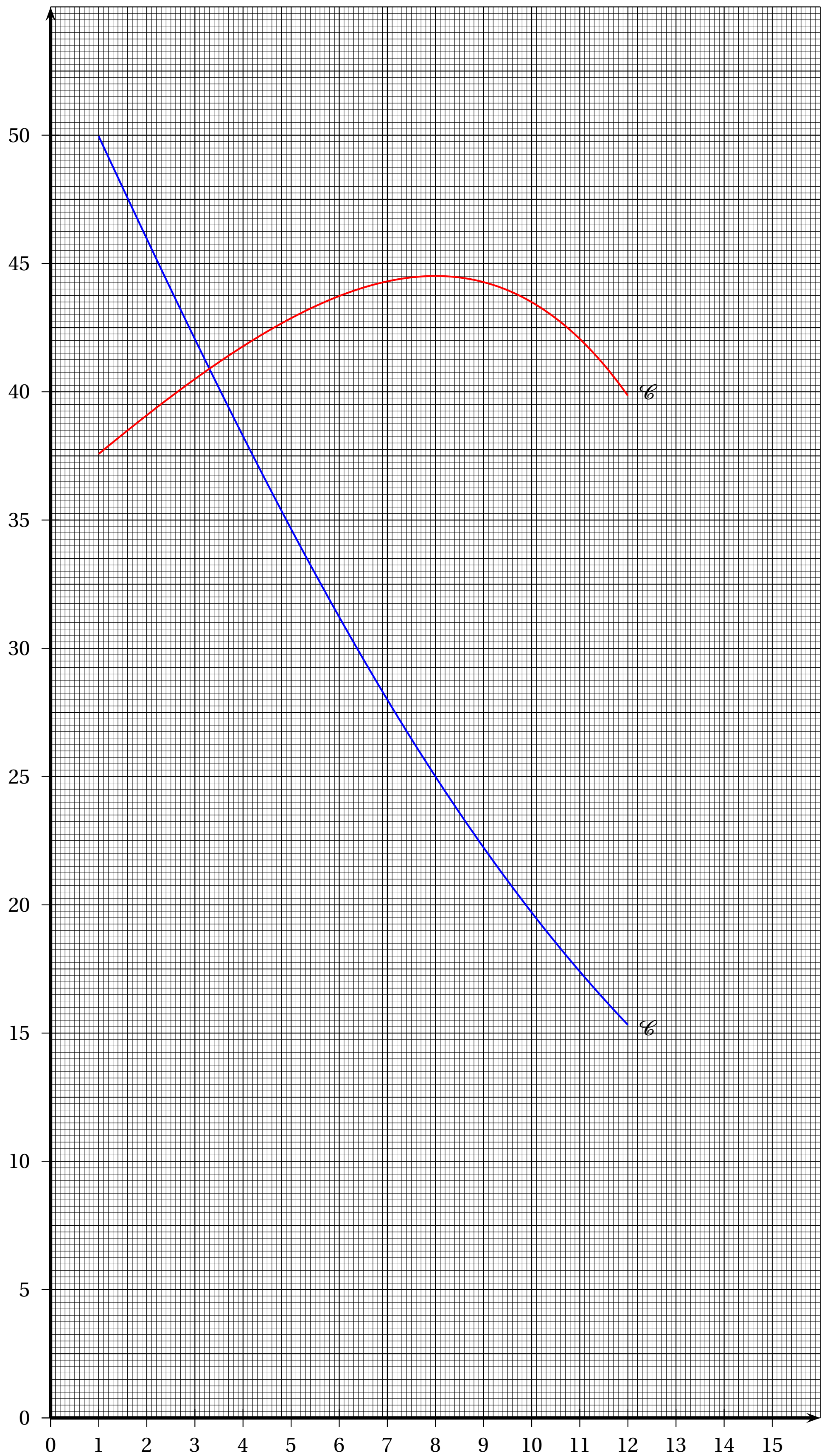
2. Un skieur emprunte cinq fois consécutives cette remontée dans les conditions décrites précédemment.
   On appelle X la variable aléatoire exprimant le nombre de remontées où la durée d'attente est supérieure 3 minutes. X suit-elle une loi binomiale ? Justifiez votre réponse.

Partie B étude de l'effet du renouvellement de le remontée mécanique

On renouvelle cette remontée mécanique en vue d'améliorer son débit.
On étudie les nouvelles durées d'attente aux moments de forte affluence pour cette nouvelle remontée.
À cet effet, on considère un échantillon de 100 skieurs pris au hasard et on constate que la moyenne des durées d'attente pour cet échantillon est 5,3 minutes et que l'écart type est 2,5 minutes. Le nombre de skieurs est suffisamment grand pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note Z la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 skieurs prélevés au hasard et avec remise dans l'ensemble des skieurs, associe la moyenne des durées d'attente pour cette nouvelle remontée. On suppose que Z suit la loi normale de moyenne inconnue m et d'écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}$.

1. À partir des informations portant sur l'échantillon, calculer, à 0,01 près, une estimation ponctuelle de σ.
2. À partir des informations portant sur l'échantillon, donner une estimation de la moyenne m des durées d'attente au pied de la nouvelle remontée mécanique par un intervalle de confiance avec le coefficient de confiance de 95 %. On prendra pour σ l'estimation obtenue à la question précédente. On donnera des valeurs arrondies à 0,1 près des bornes de l'intervalle.
3. Cette étude permet-elle d'affirmer que la durée d'attente moyenne pour l'ensemble des skieurs au pied de cette nouvelle remontée mécanique est inférieure à 6 minutes ? Justifiez voire réponse.

ANNEXE à rendre avec la copie



Brevet de technicien supérieur
Comptabilité et gestion des organisations session 2003
Nouvelle Calédonie octobre 2002

Exercice 1

Partie A : étude mathématique

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[1 ; 6]$ respectivement par :

$$f(t) = 6 - \frac{9}{t+2} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{21}{5 + \text{e}^{-0,8t}}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans le plan muni du repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques : 2 cm pour 1 unité en abscisse, et 10 cm pour 1 unité en ordonnée.

1. Calculer $f'(t)$ pour tout t appartenant à l'intervalle $[1 ; 6]$. En déduire le sens de variation de f.
2. **a.** Démontrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[1 ; 6]$,
   $g'(t) = \dfrac{16,8\text{e}^{-0,8t}}{\left(5 + \text{e}^{-0,8t}\right)^2}$.

   b. En déduire le sens de variations de g.
3. Sur la feuille donnée en annexe, compléter le tableau de valeurs de f et g (les valeurs de $f(t)$ et $g(t)$ seront arrondies à 10^{-2}).
   Construire les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
4. Résoudre algébriquement l'inéquation $g(t) \geqslant 4,15$. On donnera la valeur arrondie à 10^{-2} près de la borne inférieure de l'intervalle des solutions.
5. **a.** Donner une primitive de f sur l'intervalle $[1 ; 6]$.

   b. Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[1 ; 6]$, $g(t) = \dfrac{21\text{e}^{0,8t}}{5\text{e}^{0,8t} + 1}$.
   En déduire une primitive de g sur l'intervalle $[1 ; 6]$.

   c. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^6 f(t)\,\text{d}t$.

   d. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^6 g(t)\,\text{d}t$.

Partie B : utilisation de certains résultats pour une étude économique

Un groupe distribuant une marque d'un certain produit lance un plan de réorganisation de l'implantation des points de vente de cette marque sur une période de 6 ans. Ce plan entraîne pendant cene periode d'une part, des fermetures de points de vente et d'autre part, des ouvertures de nouveaux points de vente.

Une étude a montré que f modélise le nombre, exprimé en centaines, d'ouvertures et g le nombre, exprimé en eentaines, de fermetures de points de vente.
Ainsi, $f(1)$ représente le nombre d'ouvertures au cours de la 1re année,
$f(2)$ représente le nombre d'ouvertures au cours de la 2e année,
$f(t)$ représente le nombre d'ouvertures au cours de la te année $(1 \leqslant t \leqslant 6)$.
De même, $g(t)$ représente le nombre de fermetures au cours de la te année
$(1 \leqslant t \leqslant 6)$.

1. L'année précédant le lancement du plan, 4 150 points de vente étaient implantés en France.

   Déterminer graphiquement, au cours de quelle année le nombre de points de vente fermés dans l'année dépasse 10 % de l'effectif initial.

   On fera figurer sur le graphique les traits de construction utiles.
2. Déterminer graphiquement, l'année au cours de laquelle le nombre de points de vente ouverts devient supérieur au nombre de points de vente fermés.
3. Expliquer comment on pourrait obtenir le nombre total de points de vente de la marque à la fin du plan de réorganisation.

Exercice 2

Un éditeur scolaire produit en grande série un CD-Rom de sujets d'examens de mathèmatiques corrigés, à l'intention des étudiants des sections de techniciens supérieurs. Au cours de la fabrication de ce produit, deux défauts peuvent se produire :

– le défaut a au cours de l'impression de la jaquette ;
– le défaut b au cours de l'enregistrement des données.

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

On noté A l'évènement « le CD-Rom présente le défaut a ». Une étude a montré que $p(A) = 0,08$.

1. On prélève au hasard successivement 50 CD-Roms dans le stock On admet que le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 CD-Roms.

   On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 CD-Roms, associe le nombre de CD-Roms présentant le défaut a.

   a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. En déterminer les paramètres.

   b. Calculer les probabilités, arrondies à 10^{-2} près, des évènements suivants :
   – « parmi les 50 CD-Roms, exactement cinq présentent le défaut a ».
   – « parmi les 50 CD-Roms, deux au moins présentent le défaut a ».
2. Le prix de vente unitaire prévu d'un CD-Rom est 18 euros. L'éditeur effectue une réduction de 15 % sur le prix de vente prévu pour les CD-Roms présentant le défaut a.

   a. Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X. Que représente $E(X)$?

   b. Déduire de la question a. la recette moyenne, arrondie à un euro, que l'éditeur peut espérer de la vente de 50 CD-Roms.

Partie B

Dans cette partie, les résultats seront donnés à 10^{-2} *près*

Les CD-Roms présentant le défaut b sont considérés comme défectueux. Lorsqu'un client se trouve en possession d'un CD-Rom défectueux, il doit le renvoyer au service après-vente de l'éditeur qui en échange, lui fait parvenir un autre CD-Rom en remplacement.

On note Y la variable aléatoire qui, à chaque client concerné prélevé au hasard, associe le nombre de jours séparant la date de renvoi du CD-Rom défectueux au service après-vente et la date de réception du CD-Rom de remplacement.

On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 8 et d'écart type 2,75.

On admet qu'un client se déclare satisfait par le service après-vente si son délai d'attente ne dépasse pas 10 jours et mécontent si ce délai dépasse 14 jours.

1. Calculer la probabilité qu'un client concerné soit satisfait du service après-vente.
2. Calculer la probabilité qu'un client concerné soit mécontent du service après-vente.

Partie C

L'éditeur met en place des services après-vente décentralisés.
Dans cette partie, on s'intérese à un service après-vente donné.
Les résultats seront donnés à 10^{-2} *près*

Pendant une période donnée, on a relevé le délai d'attente, en jours, de chaque client de ce service après-vente.
Pour un échantillon de 100 clients prélevés au hasard et avec remise dans l'ensemble des clients de ce service pendant la période considérée, on constate que la moyenne des délais d'attente est $\overline{x} = 9$ et que l'écart-type s des délais d'attente est $s = 2,80$.

1. À partir des informations portant sur cet échantillon, donner une estimation ponctuelle de la moyenne μ et de l'écart type σ des délais d'attente de l'ensemble des clients de ce service pendant la période considérée.
2. Soit $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 clients prélevés au hasard et avec remise dans l'ensemble des clients de ce service pendant la période considérée, associe la moyenne des délais d'attente, en jours, des clients de ce service.

   On suppose que $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}$. On prendra pour σ l'estimation ponctuelle fournie à partir de l'échantillon de la question 1.

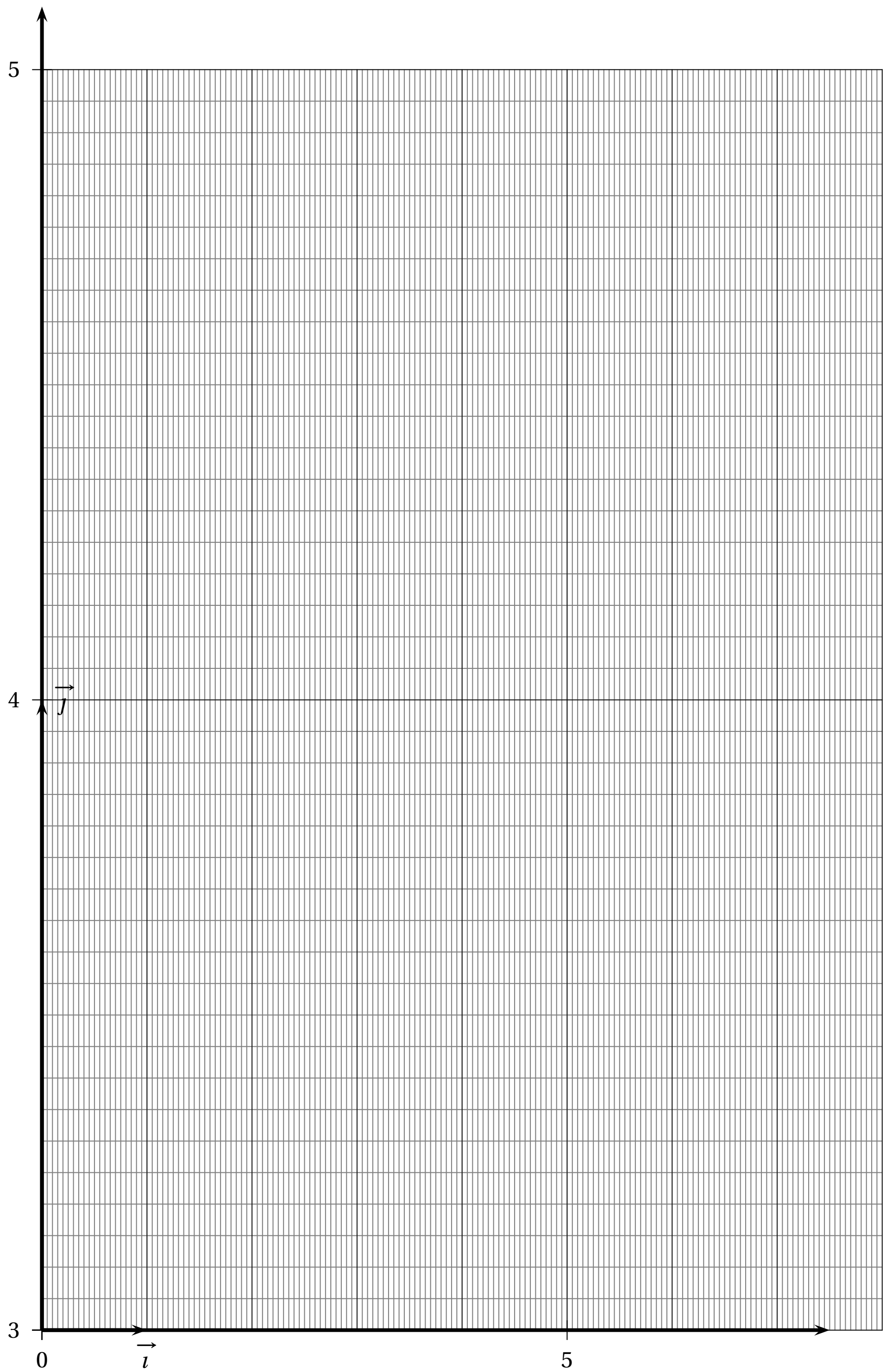
   a. Déterminer un intervalle de confiance centré en 9 de la moyenne μ des délais d'attente des clients de ce service avec le coefficient de confiance 95 %.

   b. Ce service peut-il affirmer que la moyenne des délais d'attente ne dépasse pas 10 jours ? Justifier la réponse.

ANNEXE à rendre avec la copie

Tableau de valeurs à compléter :

t	1	2	3	4	5	6
$f(t)$						
$g(t)$						



Brevet de technicien supérieur Comptabilité et gestion des organisations session 2003

Exercice 1

Pour un promoteur immobilier, le coût de production, en millions d'euros, pour n villas construites, $0 \leqslant n \leqslant 40$, est donné par :

$$C(n) = 0,4n + 5 - 2,8\ln(n+2).$$

Chaque villa est vendue 300 000 €.

Partie A :

Soit la fonction f définie sur $[0\,;\ 40]$ par

$$f(x) = 0,4x + 5 - 2,8\ln(x+2).$$

On donne, en annexe, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f et la droite D d'équation $y = 0,3x$, dans un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités : 0,5 cm en abscisses, 1 cm en ordonnées.

1. Déterminer, par le calcul, les variations de f et dresser son tableau de variations sur $[0\,;40]$.
2. Calculer l'abscisse du point A de $\mathscr{C}$ où la tangente Δ est parallèle à la droite D.
3. Tracer Δ sur le graphique de l'annexe.

Partie B : (à traiter à l'aide des résultats obtenus dans la partIe 4)

1. Combien de villas faut-il construire pour que le coût de production soit minimal ? Préciser le montant dc ce coût minimum à 10 000 € près.
2. Déterminer graphiquement le nombre minimal de villas qu'il faut construire pour réaliser un bénéfice.
3. Utiliser le graphique pour déterminer en centaines de milliers d'euros le bénéfice maximal (On pourra utiliser la question A 2.)

Partie C :

1. Montrer que le bénéfice réalisé pour la construction et la vente de n villas est, en millions d'euros :

$$B(n) = 0,1n - 5 + 2,8\ln(n+2).$$

2. **a.** Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0\,;40]$ par

$$g(x) = -0,1x - 5 + 2,8\ln(x+2)$$

et construire son tableau de variations.

   b. Déterminer la valeur de x pour laquelle $g(x)$ est maximal.

   c. À l'aide des graphiques fournis en annexe, justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution α comprise entre 5 et 6.

   d. Donner alors le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3. En déduire :

   a. le nombre minimal de villas à construire pour que le bénéfice soit positif,

b. la valeur du bénéfice maximal à 10 000 euros près.

Exercice 2 *Les résultats seront arrondis à* 10^{-4} *près*

Une usine fabrique des cylindres en grande série.

1. Le premier usinage consiste en un tournage. Deux machines M_1 et M_2 sont utilisées pour effectuer toutes les deux ce même travail. La production journalière de la machine M_1 est $n_1 = 1\,500$ pièces, avec une proportion de pièces défectueuses de $p_1 = 0,002$; pour la machine M_2, on a $n_2 = 2\,100$ pièces, avec $p_2 = 0,003$.

Dans la production totale, un jour donné, on choisit au hasard une de ces pièces tournées.

a. Montrer que la probabilité que cette pièce présente un tournage défectueux est de 0,002 6.

b. Sachant que le tournage de cette pièce est défectueux, calculer la probabilité qu'elle ait été tournée par la machine M_1.

2. Le second usinage consiste en un fraisage. L'expérience montre que, en fabrication normale, 2 % de ces fraisages sont défectueux. On dispose d'un lot comprenant un très grand nombre de ces pièces fraisées dans lequel on prélève au hasard 20 pièces (le prélèvement est assimilé à un tirage successif avec remise.)

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement au hasard de 20 pièces, associe le nombre de pièces dont le fraisage est défectueux.

a. Quelle est la loi de probabilité de X ? Donner ses paramètres. On justifiera soigneusement la réponse.

b. Calculer la probabilité que, parmi les 20 pièces prélevées, trois aient un fraisage défectueux.

3. On tire maintenant au hasard une pièce dans un lot de pièces où les deux usinages précédents ont été réalisés.

Ces deux usinages sont indépendants.

Calculer les probabilités pour que cette pièce :

a. présente les deux usinages défectueux,

b. présente l'un au moins de ces usinages défectueux,

c. ne présente aucun des usinages défectueux.

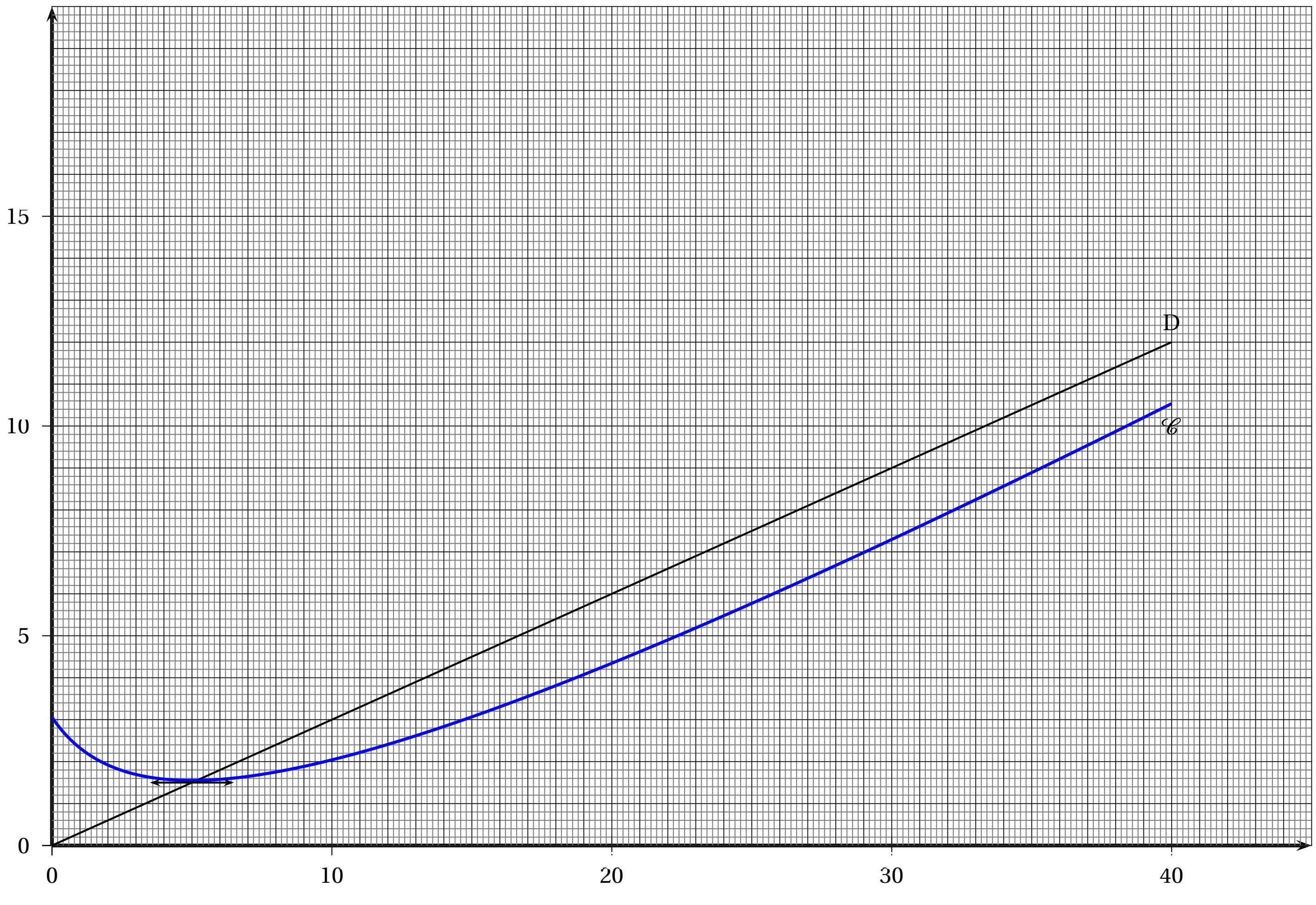
4. Sur chacun des cylindres fabriqués, on contrôle le diamètre y qui, en principe, doit être de 50,0 mm. En fait, les mesures effectuées révèlent que le diamètre de ces cylindres est une variable aléatoire Y suivant une loi normale de moyenne 50,2 mm et d'écart-type 0,5 mm.

En raison d'un montage réalisé par la suite par un robot, les cylindres dont le diamètre n'est pas compris entre 49,6 mm et 50,8 mm doivent être mis au rebut.

Calculer la probabilité pour qu'un cylindre soit mis au rebut.

On fera apparaître les différentes étapes du calcul.

Annexe de l'exercice 1



Brevet de technicien supérieur Nouvelle–Calédonie Comptabilité et gestion des organisations session 2003

Exercice 1 **12 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Une usine fabrique deux types de pièces, notées a et b, pour du matériel électrique.
Les pièces sont réalisées dans deux matériaux différents, métal et céramique.
Dans ce qui suit, sauf indication contraire, tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

Partie A – Organisation de données et calculs de probabilité

On admet que dans un stock de 10 000 pièces :

- 40 % des pièces fabriquées sont en céramique ;
- 30 % des pièces fabriquées sont de type a ;
- dans les pièces de type b, il y autant de pièces métalliques que de pièces en céramique.

1. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau ci-dessous à l'aide des informations précédentes :

	Nombre de pièces de type a	Nombre de pièces de type b	Total
Nombre de pièces métalliques			
Nombre de pièces en céramique			
Total			10 000

2. On prélève une pièce au hasard dans le stock de 10 000 pièces.
Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies. On désigne par :

A l'évènement « la pièce est du type a » ;

B l'évènement « la pièce est en métal » ;

M l'évènement « la pièce est en métal » ;

M l'évènement « la pièce est en céramique ».

a. Calculer $p(A \cap C)$.

b. Calculer la probabilité que la pièce soit de type a ou en céramique.

c. On note $p_A(C) = p(C/A)$ la probabilité de l'évènement C sachant que l'évènement A est réalisé.
Calculer $p_A(C)$.

d. Calculer la probabilité qu'une, pièce soit en métal sachant qu'elle est de type b.

Partie B – Loi binomiale

On prélève au hasard 10 pièces dans la production d'une journée. Cette production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 pièces.
On note X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 10 pièces, associe le nombre de pièces en céramique de ce prélèvement. On suppose que la probabilité de l'évènement « la pièce est en céramique » est 0,4.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux pièces en céramique.
3. Calculer la probabilité d'obtenir au plus deux pièces en céramique.

Partie C – Loi normale

Dans cette partie, on s'intéresse à la masse des pièces fabriquées. On note Y la variable aléatoire qui, à toute pièce prélevée au hasard dans un stock important de ces pièces associe sa masse, en grammes. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de moyenne 342 et d'écart-type 20.

1. Calculer $p(Y \leqslant 368)$.
2. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans ce stock ait une masse supérieure ou égale à 330 grammes.
3. Calculer M tel que $p(Y \leqslant M) = 0,85$. Arrondir à l'unité.

Exercice 2 **8 poibts**

Partie A–Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1-\ln 2}\left[x - \ln(x+1)\right]$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 10 cm.

1. **a.** Démontrer que pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f'(x) = \dfrac{1}{1-\ln 2}\dfrac{x}{x+1}$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\,1]$.
   c. Établir le tableau de variations de f.
2. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	0	0,1	0,2	0,5	0,8	0,9	1
$f(x)$		0,02			0,70		

3. Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $g(x) = x - f(x)$.
   On admet que g est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{1}{\ln 2} - 1\right]$ et que g est décroissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\ln 2} - 1\,;\,1\right]$.
   a. Construire le tableau de variations de g.
   b. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,1]$.
4. Tracer la droite Δ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   (On rappelle que l'unité graphique est 10 cm.)

Partie B–Application économique

On appelle masse salariale la somme des salaires versés chaque mois par une entreprise. La répartition de la masse salariale entre les employés peut être décrite par une fonction f, telle que $f(x)$ représente le pourcentage de salaires perçus par le pourcentage x de salariés les moins bien remunérés. Par exemple $f(0,8) = 0,70$ signifie que 70 % de la masse salariale totale est constituée de la somme des salaires perçus par les 80 % des employés les moins bien rémunérés.
Une telle fonction doit vérifier les conditions suivantes :

- $x \in [0~;~1], \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1$;
- f est croissante sur $[0~;~1]$;
- pour tout x de $[0~;~1]$, $f(x) \leqslant x$.

1. Vérifier que la fonction f définie dans la partie A peut décrire la répartition de la masse salariale d'une entreprise.

2. En utilisant la fonction f de la partie A, donner :

a. le pourcentage de la masse salariale perçue par les 10 % des employés les moins bien rémunérés.

b. le pourcentage de la masse salariale perçue par les 10 % des employés les mieux rémunérés.

Brevet de technicien supérieur
Comptabilité et gestion des organisations session 2004

Exercice 1 **10 points**

A. Étude d'une fonction logistique

Soit f la fonction définie sur [0 ; 40] par

$$f(t) = \frac{1}{1+99\mathrm{e}^{-0,26t}}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On prendra comme unités 1 cm pour 5 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour $0,1$ sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** Démontrer que, pour tout réel t de [0 ; 40],

$$f'(t) = \frac{25,74\mathrm{e}^{-0,26t}}{\left(1+99\mathrm{e}^{-0,26t}\right)^2}.$$

   b. Étudier le signe de $f'(t)$ sur [0 ; 40] et en déduire le tableau de variations de f.

2. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-3}.

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$f(t)$									

   b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

3. Résoudre graphiquement l'équation $f(t) = 0,8$.
   On fera apparaître sur la figure les constructions utiles.

B. Calcul intégral

1. Vérifier que, pour tout réel t de [0 ; 40],

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^{0,26t}}{99+\mathrm{e}^{0,26t}}.$$

2. Soit F la fonction définie sur [0 ; 40] par : $F(t) = \dfrac{1}{2,6}\ln\left(99+\mathrm{e}^{0,26t}\right)$.
   Démontrer que F est une primitive de f sur [0 ; 40].

3. Démontrer que la valeur moyenne de f sur [30 ; 40] est : $V_m = \dfrac{1}{2,6}\ln\dfrac{99+\mathrm{e}^{10,4}}{99+\mathrm{e}^{7,8}}$.
   (On rappelle que $\ln a - \ln b = -\ln\dfrac{a}{b}$ où $a > 0$ et $b > 0$.)

4. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de V_m.

C. Application des résultats des parties A et B

On suppose que $f(t)$ donne te pourcentage de foyers français équipés d'un téléviseur, entre 1954 et 1994, t étant le rang de l'année à partir de 1954.

Par exemple $f(0) \approx 0,01$ se traduit par : en 1954, 1 % des foyers étaient équipés d'un téléviseur.

$f(10) \approx 0,12$ se traduit par : en 1964, 12 % des foyers étaient équipés d'un téléviseur.

1. Déterminer le pourcentage de foyers équipés d'un téléviseur en 1968. Même question pour 1989.
   Dans cette question, les valeurs approchées de $f(t)$ sont à arrondir à 10^{-3}.
2. Déduire de la partie A. l'année à partir de laquelle 80 % des foyers ont été équipés d'un téléviseur.
3. À l'aide d'une phrase, interpréter le résultat obtenu au 4. de la partie B.

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise fabrique un certain type d'article électroménager.
On admet que chaque article de ce type peut présenter deux types de défauts :
- un défaut de soudure, noté défaut a,
- un défaut sur un composant électronique, noté défaut b.

A. Évènements indépendants
On prélève un article au hasard dans la production d'une journée.
On note A l'évènement : « l'article présente le défaut a ».
On note B l'évènement : « l'article présente le défaut b ».
On admet que les probabilités des évènements A et B sont $P(A) = 0,03$ et $P(B) = 0,02$ et on suppose que ces deux évènements sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l'évènement E_1 : « l'article présente le défaut a et le défaut b ».
2. Calculer la probabilité de l'évènement E_2 « l'article présente au moins un des deux défauts ».
3. Calculer la probabilité de l'évènement E_3 « l'article ne présente aucun défaut ».
4. Calculer la probabilité de l'évènement E_4 : « l'article présente un seul des deux défauts ».

   On admet que, si les évènements A et B sont indépendants, alors les évènements $\overline{A}$ et B sont indépendants et les évènements A et $\overline{B}$ sont indépendants.

B. Loi binomiale

Dans cette partie, tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

Les articles sont mis en place dans des petites surfaces de distribution par lot de 25.
On prélève au hasard un lot de 25 articles dans la production d'une journée.
On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 25 articles.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 25 articles, associe le nombre d'articles défectueux parmi ces 25 articles.
On suppose que la probabilité de l'évènement D : « l'article est défectueux » est $P(D) = 0,05$.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer $P(X = 0)$.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait exactement deux articles défectueux.
4. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au plus deux articles défectueux.

C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Les articles sont mis en place dans les hypermarchés par lots de 800.
On prélève au hasard un lot de 800 articles dans un stock important. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise dc 800 articles.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 800 articles, associe le nombre d'articles défectueux parmi ces 800 articles. On admet que Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(800\ ;\ 0,05)$.
On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de paramètres : $m = 40$ et $\sigma = 6$.
On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(40\ ;\ 6)$.

1. Justifier les valeurs de m et de σ.

2. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 41 articles défectueux dans le lot, c'est à dire calculer : $P(Z \leqslant 41,5)$. Arrondir à 10^{-2}

Brevet de technicien supérieur Comptabilité et gestion des organisations session 2004

Exercice 1 **12 points**

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes

A. Statistique

On a relevé le chiffre d'affaires annuel d'une société depuis 8 ans. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant, où x_i est le rang de l'année et y_i le chiffre d'affaires correspondant, en millions d'euros.

Années	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaires annuel : y_i	5	7,5	9,2	11	18,3	22,5	31	43

On renonce à un ajustement affine pour ce nuage de points. On effectue le changement de variable $z_i = \ln y_i$ (ln désigne le logarithme népérien).

1. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant dans lequel on fera figurer les valeurs approchée de z_i, arrondies à 10^{-3}.

Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_i = \ln y_i$	1,609							

   b. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique $(x_i\ ;\ z_i)$. Arrondir r à 10^{-3}. Le résultat obtenu permet d'envisager un ajustement affine.

2. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, l'équation de la droite de régression de z en x sous la forme $z = ax + b$, où a et b sont à arrondir à 10^{-3}.
3. En déduire une expression de y en fonction de x de la forme $y = \alpha \mathrm{e}^{kx}$ où α et k sont des constantes à arrondir à 10^{-3}.
4. En déduire une estimation, arrondie à 10^{-1} du chiffre d'affaires de l'entreprise, en millions d'euros, pour l'année 2004.

B. Probabilités

Les trois questions suivantes sont indépendantes

Dans une usine de la société dont on a étudié le chiffre d'affaires dans la partie A., on fabrique des pièces métalliques d'un certain type pour du matériel de bureau.

1. Dans cette usine, les pièces métalliques de ce type sont fabriquées par deux unités de production notées « unité 1 » et « unité 2 ».

   Un jour donné, la production de l'unité 1 est de 600 pièces et la production de l'unité 2 est de 900 pièces.

   On admet que 0,7 % des pièces produites par l'unité 1 et 1,2 % des pièces produites par l'unité 2 ont un « défaut de surface ».

   On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble des 1 500 pièces produites par cette usine pendant cette journée. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être prélevées.

   On définit les évènements suivants :

A : « la pièce est produite par l'unité 1 » ;
B : « la pièce est produite par l'unité 2 » ;
D : « la pièce présente un défaut de surface ».

On note $P_A(D) = P(D/A)$ la probabilité de l'évènement D sachant que l'évènement A est réalisé.

a. Déterminer $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P_B(D)$ à l'aide des informations contenues dans l'énoncé.

b. Calculer $P(A \cap D)$ et $P(B \cap D)$.

c. En déduire la probabilité qu'une pièce, prélevée au hasard dans la production totale d'une journée, présente un défaut de surface

2. On prélève au hasard un lot de 50 pièces dans la production totale d'une journée.

Le nombre de pièces produites est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 pièces. On note E l'évènement : « une pièce, prélevée au hasard dans la production de la journée, a un défaut de surface ».

On admet que $P(E) = 0,01$.

On note X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 50 pièces, associe le nombre de pièces présentant un défaut de surface parmi ces 50 pièces.

a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.

b. Calculer $P(X \leqslant 1)$. Arrondir à 10^{-3}.

3. On prélève une pièce au hasard dans un stock important.

On admet que la variable aléatoire Y qui, à chaque pièce associe la mesure de sa « dureté », suit la loi normale de moyenne 55 et d'écart type 1,2.

Une pièce est jugée acceptable si la mesure de sa dureté appartient à l'intervalle $[52,66 ; 57,34]$.

Calculer la probabilité que la pièce soit acceptable. Arrondir à 10^{-3}.

Exercice 2 **8 points**

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(t) = 42 - 40\mathrm{e}^{-0,3t}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unités : 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses, et 1 cm pour 5 sur l'axe des ordonnées).

1. **a.** Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

b. Interpréter graphiquement le résultat obtenu au **a.**.

2. **a.** Calculer $f'(t)$ pour tout t de $[0 ; +\infty[$.

b. Étudier le signe de $f'(t)$ lorsque t varie dans $[0 ; +\infty[$.

c. Établir le tableau de variations de f dans $[0 ; +\infty[$.

3. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant, dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-1}.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(t)$											

b. Construire la courbe $\mathscr{C}$.

4. Résoudre graphiquement dans $[0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $f(t) \geqslant 35$. On fera apparaître sur la figure les constructions utiles. (On utilisera une valeur approchée à 10^{-1})

5. **a.** Démontrer que la valeur moyenne de f sur $[0\,;\,5]$ est $V_m = \dfrac{46}{3} + \dfrac{80}{3}\text{e}^{-1,5}$.

   b. Donner la valeur approchée, arrondie à l'unité, de V_m.

B. Application économique

On suppose que $f(t)$ représente le coût total d'utilisation, en milliers d'euros, au bout de t années, d'une des machines dont s'est équipée une entreprise.

1. L'entreprise décide de revendre une machine dès que le coût d'utilisation dépasse 35 000 euros. Déduire du A. au bout de combien d'années l'entreprise devra revendre cette machine.
2. Donner, à l'aide d'une phrase, une interprétation économique du résultat obtenu au A. 5. b..

Brevet de technicien supérieur Comptabilité et gestion des organisations session 2005

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties A, B et C de cet exercice sont indépendants.

Une entreprise fabrique en grande quantité des sacs poubelle.

A. Probabilités conditionnelles

On admet que 3 % des sacs de la production présentent un défaut.
On contrôle les sacs d'un lot. Ce contrôle refuse 94 % des sacs avec défaut et accepte 92 % des sacs sans défaut.
On prélève un sac au hasard dans le lot.
On considère les évènements suivants :

D : « le sac a un défaut » ;
A : « le sac est accepté à l'issue du contrôle ».

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé :
   $P(D)$, $P_D\left(\overline{A}\right)$, et $P_{\overline{D}}(A)$.
   (On rappelle que $P_D\left(\overline{A}\right) = P\left(\overline{A}/D\right)$ est la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement D est réalisé).
2. **a.** Déterminer $P_D(A)$.
   b. Calculer $P(A \cap D)$ et $P\left(A \cap \overline{D}\right)$.
3. Déduire de ce qui précède $P(A)$.
4. Calculer la probabilité qu'un sac soit défectueux sachant qu'il a été accepté par le contrôle. Arrondir à 10^{-3}.

Dans les parties B et C, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

B. Loi binomiale

On note E l'évènement : « Un sac prélevé au hasard dans une grosse livraison pour une municipalité n'a pas de défaut ».
On suppose que la probabilité de E est $0,97$.
On prélève au hasard 10 sacs de cette livraison pour vérification. La livraison est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 sacs.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 sacs, associe le nombre de sacs sans défaut de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, tous les sacs soient sans défaut.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, exactement 9 sacs soient sans défaut
4. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins 9 sacs soient sans défaut.

C. Loi normale

Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque sac prélevé au hasard dans la production, associe la masse maximale, en kilogrammes, qu'il peut supporter sans se déchirer.
On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 5 et d'écart type 0,4.

1. Calculer $P(46 \leqslant Y \leqslant 5,4)$.

2. Déterminer le nombre réel positif h tel que :
$P(v \leqslant 5+h) = 0,95$.
Interpréter le résultat obtenu à l'aide d'une phrase.

Exercice 2 **10 points**

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur [1 ; 7] par

$$f(x) = 100 + 0,01(x-7)\mathrm{e}^{x}.$$

1. **a.** Démontrer que, pour tout x de l'intervalle [1 ; 7], $f'(x) = 0,01(x-6)\mathrm{e}^{x}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur [1 ; 7].

c. Établir le tableau de variations de f sur [1 ; 7].

2. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-1}.

x	1	2	3	4	5	6	6,5	7
$f(x)$								

b. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthononnal d'unité graphique 2 cm. Faire la figure dans un repère orthonormal où la graduation commence à zéro sur l'axe des abscisses et commence à 95 sur l'axe des ordonnées.

c. Résoudre graphiquement dans [1 ; 7] l'équation $f(x) = 97$. On fera apparaître sur la figure les constructions utiles.

B. Calcul intégral

1. On note $I = \displaystyle\int_1^7 0,01(x-7)\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$.
Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $I = 0,01\left(7\mathrm{e} - \mathrm{e}^{7}\right)$.

2. On note $J = \displaystyle\int_1^7 f(x)\,\mathrm{d}x$.
En utilisant le résultat du **1.**, démontrer que $J = 600 + 0,01\left(7\mathrm{e} - \mathrm{e}^{7}\right)$.

C. Application des résultats des parties A et B

Une entreprise fabrique, chaque jour, entre 1 et 7 tonnes de produit chimique.
On admet que, lorsque x tonnes de ce produit sont fabriquées, $1 \leqslant x \leqslant 7$, le coût moyen de fabrication d'une tonne de produit est, en euros :

$$f(x) = 100 + 0,01(x-7)\mathrm{e}^{x}.$$

1. Déterminer la quantité de produit à fabriquer pour que le coût moyen soit minimal. Determiner alors ce coût moyen. Arrondir à l'euro.

2. Déduire de la partie B la valeur moyenne de $f(x)$ lorsque x varie dans [1 ; 7]. Arrondir à l'euro.

3. Quelle(s) quantité(s) de produit faut-il fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une tonne de produit soit de 97 euros ?

Brevet de technicien supérieur Polynésie
Comptabilité et gestion des organisations session 2005

Exercice 1 **9 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Une PME fabrique des boules de billard.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}

A. Loi normale

Le diamètre des boules est exprimé en millimètres.
Une boule est dite « de premier choix » si son diamètre appartient à l'intervalle [61 ; 61,5], sinon, elle est dite « de deuxième choix ».
On note X la variable aléatoire qui, à chaque boule prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre.
On suppose que X suit la loi normale de moyenne $61,25$ et d'écart type $0,2$.

1. Calculer la probabilité qu'une boule prélevée au hasard dans la production soit de premier choix.
2. En déduire la probabilité qu'une boule prélevée au hasard dans la production soit de second choix.
3. Calculer $P(X \geqslant 61,5)$.

B. Loi binomiale

Dans un stock de boules, 67 % des boules sont blanches et le reste est rouge.
On prélève au hasard 15 boules de ce stock. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 15 boules.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 15 boules, associe le nombre de boules blanches parmi les 15 boules.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait exactement 10 boules blanches.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait, au plus, 13 boules blanches.

C. évènements indépendants

On prélève une boule au hasard dans un lot important.
On note A l'évènement « la boule est de deuxième choix ».
On note B l'évènement « la boule est blanche ».
On admet que les probabilités des évènements A et B sont $P(A) = 0,21$ et $P(B) = 0,67$. On suppose de plus que ces deux évènements sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l' évènement E_1 : « la boule est de deuxième choix et elle est blanche ».
2. Calculer la probabilité de l'évènement E_2 : « la boule est de deuxième choix ou elle est blanche ».

3. On rappelle que si une boule n'est pas de deuxième choix, elle est de premier choix et que les boules sont, soit blanches, soit rouges.

Calculer la probabilité de l'évènement E_3 : « la boule est de premier choix et elle est rouge ».

On admet que si les évènements A et B sont indépendants, alors les évènements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercice 2 **11 points**

A. Étude d'une fonction logistique

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(t) = \frac{12}{1+3\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. **a.** On admet que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} = 0$. En déduire $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$.

b. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. **a.** Démontrer que, pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$,

$$f'(t) = \frac{18\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}{\left(1+3\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)^2}.$$

b. Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

c. Établir le tableau de variation de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. **a.** Déterminer le coefficient directeur de la tangente Δ à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse 0.

b. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à $1O^{-1}$.

t	0	1	2	4	5	8	10
$f(t)$							

c. Tracer la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$.

4. Résoudre graphiquement l'équation $f(t) = 10$.

On fera apparaître sur la figure les constructions utiles.

B. Calcul intégral

1. **a.** Vérifier que, pour toutt de $[0\,;\,+\infty[$, $f(t) = \dfrac{12\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}+3}$.

b. Soit F la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $F(t) = 24\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}+3\right)$.

Démontrer que F est une primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Démontrer que la valeur moyenne de f sur $[0\,;\,10]$ est :

$$V_m = 2,4\ln\left(\frac{\mathrm{e}^5+3}{4}\right).$$

b. Donner la valeur approchée, arrondie à 10^{-2}, de V_m.

C. Application économique

On admet que dans une entreprise fabriquant des accessoires pour la téléphonie mobile, la production d'un certain matériel depuis 1993, est donnée, en milliers d'exemplaires, par $f(t)$.
Par exemple $f(0) = 3$ se traduit par : « en 1993, il a été fabriqué 3 000 exemplaires du matériel considéré ».

1. Déduire de la partie A. une valeur approchée de la production de ce matériel en 2001.
2. Déduire de la partie A., l'année au cours de laquelle la production a dépassé 10 milliers d'exemplaires.
3. À l'aide d'une phrase, interpréter le résultat de la question 2. b. de la partie B.

Brevet de technicien supérieur Comptabilité et gestion des organisations session 2006

Exercice 1 **11 points**

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Ajustement affine

Un institut de recherche démographique a étudié l'évolution de la population d'une grande ville. Les résultats de cette étude sont donnés dans le tableau suivant où t_i désigne le rang de l'armée et où p_i désigne l'effectif de la population, en millions d'habitants au cours de la même année.

Rang de l'année : t_i	0	5	10	15	20	25
Effectif : p_i	5	5,6	6,1	6,8	7,6	8,4

On renonce à un ajustement affine pour ce nuage de points. On effectue le changement de variable $y_i = \ln p_i$ (ln désigne le logarithme népérien).

1. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-3}.

Rang de l'année : t_i	0	5	10	15	20	25
$y_i = \ln p_i$						

2. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $\left(t_i,\ y_i\right)$. Arrondir à 10^{-3}.
3. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression de y en t sous la forme $y = at + b$, où a et b sont à arrondir à 10^{-3}.
4. En déduire une expression de p en fonction de t de la forme $p = \alpha \mathrm{e}^{kt}$ où la constante α sera arrondie à 10^{-1} et la constante k sera arrondie à 10^{-2}.
5. À l'aide du résultat du 4., donner une estimation de l'effectif de la population l'année de rang 35.
   Arrondir à 10^{-1}.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie pour tout t de $[-25 ; 35]$ par

$$f(t) = 5\mathrm{e}^{0,02t}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$. On prendra comme unités 1 cm pour 5 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

1. Étudier les variations de f sur $[-25 ; 35]$.
2. Construire la courbe $\mathscr{C}$ sur une feuille de papier millimétré,
3. **a.** Démontrer que la valeur moyenne de f sur $[0 ; 25]$ est $V_m = 10\left(\mathrm{e}^{0,5} - 1\right)$.
   b. Donner la valeur approchée, arrondie à 10^{-1}, de V_m.
4. On admet que, lorsque $0 \leqslant t \leqslant 30$, l'effectif de la population de la ville étudiée dans la partie A est donné, en millions d'habitants, l'année de rang t, par : $f(t) = 5\mathrm{e}^{0,02t}$.

a. Déterminer l'effectif, en millions d'habitants, de la population l'année de rang 28. Arrondir à 10^{-1}.

b. Interpréter, à l'aide d'une phrase, le résultat obtenu au 3. b..

c. Déterminer le rang de l'année au cours de laquelle l'effectif de la population dépassera 9 millions d'habitants.

Exercice 2 **9 points**

Les trois parties A, B et C de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise fabrique en grande quantité un certain type de pièces pour de l'équipement informatique.

A. Probabilités conditionnelles
Les pièces sont fabriquées par deux machines notées : « machine 1 »et « machine 2 ».
40 % des pièces proviennent de la machine 1 et 60 % de la machine 2.
On admet que 5 % des pièces provenant de la machine 1 sont défectueuses et que 2 % des pièces provenant de la machine 2 sont défectueuses.
On prélève au hasard une pièce dans la production d'une journée des deux machines.
Toutes les pièces ont la même probabilité d'être prélevées.
On appelle A l'évènement : « la pièce provient de la machine I ».
On appelle B l'évènement : « la pièce provient de la machine 2 ».
On appelle D l'évènement : « la pièce est défectueuse ».

1. À l'aide des informations contenues dans l'énoncé, donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$, et $P_B(D)$.
(On rappelle que $P_A(D) = P(D/A)$ est la probabilité de l'évènement D sachant que l'évènement A est réalisé).

2. **a.** Calculer $P(A \cap D)$ et $P(B \cap D)$.

b. En déduire la probabilité qu'une pièce soit défectueuse.

3. Calculer la probabilité qu'une pièce provienne de la machine 1 sachant qu'elle est défectueuse.

B. Loi binomiale Dans un stock de ces pièces, on prélève au hasard 10 pièces pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 pièces.
On note E l'évènement : « une pièce prélevée au hasard dans ce stock est défectueuse ». On suppose que $P(E) = 0,03$.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 pièces, associe le nombre de pièces défectueuses parmi ces 10 pièces.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucune pièce ne soit défectueuse.
Arrondir à 10^{-3}.

3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux pièces soient défectueuses
Anondir à 10^{-3}.

C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale
Dans un lot de ce type de pièces, on admet que 3,2 % des pièces sont défectueuses.
On prélève au hasard 500 pièces de ce lot. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisa assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 500 pièces.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 500 pièces, associe le nombre de pièces défectueuses parmi ces 500 pièces.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,032$.

1. On considère que la loi suivie par la variable aléatoire Y peut être approchée par la loi normale de moyenne 16 et d'écart type $3,9$. Justifier les paramètres de cette loi normale.

2. On désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 16 et d'écart typ $3,9$.
Déterminer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait entre 13 et 19 pièces défectueuses, c'est-à-dire calculer $P(12,5 \leqslant Z \leqslant 19,5)$. Arrondir à 10^{-2}.

Brevet de technicien supérieur session 2006
Comptabilité et gestion des organisations Polynésie

Exercice 1 **11 points**

On considère un produit dont le prix de la tonne est, en euros, noté x.
La demande, $d(x)$, est la quantité de ce produit, exprimée en tonnes, que les consommateurs sont prêts à acheter au prix de x euros la tonne.
L'offre, $o(x)$ est la quantité de ce produit, exprimée en tonnes, que les producteurs sont prêts à vendre au prix de x euros la tonne.
On appelle prix d'équilibre de ce produit le prix pour lequel l'offre et la demande sont égales.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Ajustement affine

On a relevé les valeurs, en tonnes, de l'offre et de la demande de ce produit pour différents prix de la tonne. Les résultats figurent dans le tableau suivant :

Prix de la tonne, en euros : x_i	10	10,5	11	11,7	13	15	17
Demande, en tonne : y_i	11,5	10,5	9,9	9,1	7,9	6,5	5,1
Offre, en tonne : z_i	3,5	4,5	4,9	5,3	5,8	6,2	6,5

1. On pose $Y_i = \ln y_i$ et $Z_i = \mathrm{e}^{z_i}$.
   Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-3}.

x_i							17
$Y_i = \ln y_i$							
$Z_i = \mathrm{e}^{z_i}$							

2. **a.** Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite de régression de Y en x sous la forme $Y = ax + b$ où a est à arrondir à 10^{-2} et b à 10^{-1}.

   b. En déduire une expression de y en fonction de x.

3. **a.** Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite de régression de Z en x sous la forme $Z = a'x + b'$ où a' et b' sont à arrondir à l'unité.

   b. En déduire une expression de z en fonction de x.

B. Recherche d 'un prix d'équilibre

1. Soit f la fonction définie sur $[10\,;\,17]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-0,11x+3,5}.$$

   a. Étudier les variations de f sur $[10\,;\,17]$.

   b. Construire la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f dans un repère orthonormal d'unité graphique deux centimètres. Faire la figure dans un repère orthonormal où la graduation commence à 10 sur l'axe des abscisses et à 0 sur l'axe des ordonnées.

2. Soit g la fonction définie sur [10 ; 17] par :

$$g(x) = \ln(90x - 852).$$

a. Étudier les variations de g sur [10 ; 17].

b. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de g dans le même repère que la courbe $\mathscr{C}_f$.

3. Résoudre graphiquement dans [10 ; 17] l'équation $f(x) = g(x)$. On fera apparaître sur la figure les constructions utiles.

4. On admet que, pour un prix du produit de x euros la tonne, la demande $d(x) = f(x)$ et l'offre $o(x) = g(x)$ où f et g sont les fonctions définies au début de la partie B.

a. Déduire de ce qui précède une valeur approchée du prix d'équilibre.

b. En déduire une valeur approchée arrondie à 0,1 tonne de l'offre correspondant an prix d'équilibre.

Exercice 2 **9 points**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise fabrique, en grande quantité, un certain type de pièces pour l'industrie automobile.

A. Évènements indépendants
Dans cette partie, on s'intéresse à deux défauts possibles, notés a et b.
On prélève une pièce au hasard dans la production d'une journée.
On considère les évènements suivants :
E_1 : « la pièce prélevée présente le défaut a » ;
E_2 : « la pièce prélevée présente le défaut b ».
On admet que $P(E_1) = 0,005$ et que $P(E_2) = 0,02$.

Dans cette partie, on demande les valeurs exactes des probabilités.

On suppose de plus que les deux évènements E_1 et E_2 sont indépendants.

1. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production de la journée présente les deux défauts.

2. **a.** Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production de la journée présente au moins un des deux défauts.

b. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production de la journée ne présente aucun des deux défauts.

B. Loi binomiale

Dans cette partie les résultats approchés sont à arrondir à $\mathbf{10^{-3}}$.
On note E l'évènement : « une pièce prélevée au hasard dans un stock important présente un défaut pouvant affecter la sécurité ».
On suppose que $P(E) = 0,01$.
On prélève au hasard 50 pièces dans un stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise de 50 pièces.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 pièces, associe le nombre de pièces de ce prélèvement présentant un défaut pouvant affecter la sécurité.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer $P(X = 0)$.

3. **a.** Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au plus deux pièces présentant un défaut pouvant affecter la sécurité.

b. En déduire la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au moins trois pièces présentant un défaut pouvant affecter la sécurité.

Brevet de technicien supérieur session 2006
Comptabilité et gestion des organisations
Nouvelle–Calédonie

Exercice 1 **11 points**

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1~;~14]$ par

$$f(x) = \frac{x+1-\ln x}{x}.$$

1. **a.** Démontrer que. pour tout x de l'intervalle $[1~;~14]$, $f'(x) = \dfrac{\ln x - 2}{x^2}$.

   b. Résoudre dans $[1~;~14]$ l'inéquation $\ln x - 2 \geqslant 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $[1~;~14]$.

   c. Établir le tableau de variation de f sur $[1~;~14]$.

2. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	14
$f(x)$			0,97						

   b. Construire la courbe representative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthogonal. Sur l'axe des abscisses, on prend un centimètre pour une unité et, sur l'axe des ordonnées, on prend dix centimètres pour une unité.

3. **a.** Résoudre dans $[1~;~14]$ l'équation $f(x) = 1$.

   b. On note α la solution obtenue au **a.** Placer sur la figure le point I d'abscisse α.

B. Calcul intégral

1. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[1~;~14]$ par :

$$F(x) = x + \ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

   Démontrer que F est une primitive de f sur $[1~;~14]$.

2. On note $J = \displaystyle\int_1^{14} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   a. Démontrer que $J = \ln 14 - \dfrac{1}{2}(\ln 14)^2 + 13$.

   b. Donner la valeur approchée de J arrondie à 10^{-2}.

C. Application des résultats des parties A et B

Une entreprise fabrique, chaque jour, entre 100 et 1 400 exemplaires d'un certain type de pièce pour téléphone mobile.
On admet que, lorsque x centaines d'exemplaires de cette pièce sont fabriquées, $1 \leqslant x \leqslant 14$, le coût moyen de fabrication d'une pièce est $f(x)$ euros, où f est la fonction qui a été définie dans la partie A.

1. Déterminer la quantité de pièces à fabriquer, en centaine, pour que le coût moyen soit minimal.
   Arrondir à 10^{-2}.
   Déterminer alors ce coût moyen. Arrondir an centime d'euro.
2. Déterminer la quantité de pièces à fabriquer, en centaines, pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit un euro. Arrondir à 10^{-2}.
3. Déduire de la partie B la valeur moyenne de $f(x)$ lorsque x varie dans $[1\,;\,14]$. Donner le résultat arrondi au centime d'euro.

Exercice 2 **9 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une usine fabrique en grande quantité un certain modèle de stylo.

Dans les parties A et B, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}

A. Loi binomiale

On prélève un stylo, au hasard, dans une importante livraison destinée à une chaîne d'hypermarchés.
On note E l 'évènement « un stylo prélevé au hasard est défectueux ».
On suppose que $P(E) = 0,016$.
On prélève au hasard vingt stylos dans la livraison pour vérification. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement de vingt stylos à un tirage avec remise de vingt stylos.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de vingt stylos, associe le nombre de stylos défectueux de ce prélèvement

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il n'y ait aucun stylo défectueux.
3. En déduire la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au moins un stylo défectueux.

B. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Les stylos sont livrés aux grandes surfaces par lots de 1 000. On prélève au hasard un lot de 1 000 stylos dans un depôt de l'usine. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 1000 stylos.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 1 000 stylos, associe le nombre de stylos défectueux parmi les 1 000 stylos. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,016$.
On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de moyenne 16 et d'écart type 4.

1. Justifier les paramètres de cette loi normale.
   On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 16 et d'écart type 4.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 17 stylos défectueux, c'est-à-dire calculer $P(Z \leqslant 17,5)$.

C. Probabilités conditionnelles

L'usine possède deux ateliers de fabrication, notés « atelier 1 » et « atelier 2 ».
L'atelier 1 produit 60 % de la production et l'atelier 2 produit le reste.
1 % des stylos provenant de l'atelier 1 sont défectueux et 2,5 % des stylos provenant de l'atelier 2 sont défectueux.
On prélève au hasard un stylo parmi la production totale des deux ateliers d'une journée.
On définit les évènements suivants :

A : « le stylo prélevé provient de l'atelier 1 » ;
B : « le stylo prélevé provient de l'atelier 2 » ;
D : « Le stylo prélevé est défectueux ».

Dans cette partie, on demande les valeurs exactes des probabilités.

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé : $P(A), P(B), P(D/A), P(D/B)$.
(On rappelle que $P(D/A) = P_A(D)$ est la probabilité de l'évènement D sachant que l'évènement A est réalisé.)
2. Calculer $P(D \cap A)$ et $P(D \cap B)$.
3. Déduire de ce qui précède $P(D)$.

Brevet de technicien supérieur
Comptabilité et gestion des organisations session 2007

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Un atelier d'assemblage de matériel informatique s'approvisionne en pièces d'un certain modèle.

A. Évènements indépendants et probabilités conditionnelles
L'atelier reçoit ce modèle de pièces en grande quantité. Chaque pièce peut présenter deux défauts que l'on appelle défaut a et défaut b.
On prélève une pièce au hasard dans une importante livraison.
On note A l'évènement : « l'appareil présente le défaut a »et on note B l'évènement : « l'appareil présente le défaut b ».
On admet que les probabilités des évènements A et B sont $P(A) = 0,02$ et $P(B) = 0,01$.
On suppose que les deux évènements A et B sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l'évènement E_1 : « la pièce présente le défaut a et le défaut b ».
2. Calculer la probabilité de l'évènement E_2 « la pièce est défectueuse, c'est-à-dire qu'elle présente au moins un des deux défauts ».
3. Calculer la probabilité de l'évènement E_3 : « la pièce ne présente aucun défaut ».
4. Calculer la probabilité que la pièce présente les deux défauts sachant qu'elle est défectueuse. Arrondir à 10^{-4}.

Dans ce qui suit, tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}

B. Loi binomiale
On note D l'évènement : « une pièce prélevée au hasard dans un stock important esi défectueuse ».
On suppose que $P(D) = 0,03$.
On prélève au hasard 200 pièces dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 200 pièces.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 200 pièces, associe le nombre de pièces de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement ii y ait exactement une pièce défectueuse.
3. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement il y ait au moins deux pièces défectueuses.

C. Loi normale
On s'intéresse maintenant à la masse de ces pièces.
On note Y la variable aléatoire qui à chaque pièce prélevée au hasard dans un lot important associe sa masse en grammes.
On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 500 et d'écart type 4.

1. Calculer $P(Y \leqslant 510)$.
2. Une pièce de ce modèle est acceptable pour la masse lorsque celle-ci appartient à l'intervalle $[490\,;\,510]$. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard soit acceptable pour la masse.

Exercice 2 **10 points**

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 4 - \mathrm{e}^{-x}(x+2)^2.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On prend comme unités : 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 2 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}(x+2)^2 = 0$; en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.
2. **a.** Démontrer que pour tout réel x de $[0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = x(x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout réel x de $[0\,;\,+\infty[$. Établir le tableau de variations de la fonction f.
3. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$									

4. Construire la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$ sur une feuille de papier millimétré.

B. Calcul intégral

1. **a.** Soient g et h les fonctions définies sur $[0\,;\,+\infty[$ respectivement par :

   $$g(x) = -\mathrm{e}^{-x}(x+2)^2 \quad\text{et}\quad h(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(x^2+6x+10\right).$$

   Démontrer que h est une primitive de g sur $[0\,;\,+\infty[$.

   b. Déduire du **1. a.** une primitive F de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. **a.** Démontrer que la valeur moyenne de f sur $[0:8]$ est $V_m = \dfrac{11+61\mathrm{e}^{-8}}{4}$.

   b. Donner la valeur approchée, arrondie à 10^{-2}, de V_m.

C, Application économique

Depuis le premier janvier 1999 une entreprise fabrique un produit noté P. Ce produit a été commercialisé dans une ville comportant 40 000 foyers acheteurs potentiels.

On admet que le nombre de foyers équipés du produit P le premier janvier de l'année $(1999+n)$ est égal à $10000 \times f(n)$, où f est la fonction définie dans la partie A.

1. Déterminer le pourcentage de foyers équipés du produit P le premier janvier 2007 parmi les foyers acheteurs potentiels. Arrondir à 1 %.
2. Déterminer le nombre de foyers qui se sont équipés entre le premier janvier 2001 et le premier janvier 2002.

Brevet de technicien supérieur session 2007
Comptabilité et gestion des organisations
Nouvelle–Calédonie

Exercice 1 **11 points**

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A Ajustement affine

Une étude a été réalisée sur le solde moyen des comptes courants d'entreprises clientes d'un important groupe bancaire. Les résultats de cette étude sont donnés dans le tableau suivant : x désigne un montant en centaines de milliers d'euros, n désigne le nombre de milliers d'entreprises qui ont un compte courant dont le solde est supérieur ou égal à x.

x	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	2
n	1,81	0,79	0,32	0,15	0,078	0,031

1. Compléter après l'avoir reproduit le tableau suivant dans lequel les valeurs approchées sont àarrondir à 10^{-3}.

x	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	2
n	1,81	0,79	0,32	0,15	0,078	0,031
$z = \ln n$						

2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite de régression de z en x sous la forme $z = ax + b$, où a et b sont à arrondir à 10^{-2}.
3. En déduire une expression de n en fonction de x de la forme $n = \alpha e^{kx}$ où la constante k sera arrondie à 10^{-2}.
4. À l'aide du résultat du **3**, donner une estimation du nombre d'entreprises dont le compte courant a un solde moyen supérieur ou égal à 250 000 euros.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 3,2e^{-2,4x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. L'unité est 5 centimètres.

1. **a.** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   b. Que peut-on déduire du résultat du **a** pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10

x	0,2	0,5	1	1,5	2
$f(x)$					

   b. Construire la courbe $\mathscr{C}$ sur une feuille de papier millimétré.

4. a. Résoudre par le calcul, dans $[0\ ;\ +\infty[$, l'équation $f(x) = 0,60$.
Donner la valeur exacte de la solution x_0 puis la valeur approchée de x_0 arrondie a 10^{-2}.

   b. Retrouver graphiquement le résultat du **4. a.**. On fera apparaître sur la figure les constructions utiles.

C. Application

On admet maintenant que, lorsque $0,1 \leqslant x \leqslant 2,5$, il y a $1\,000 f(x)$ entreprises possédant un compte courant dont le solde moyen est supérieur ou égal à x centaines de milliers d'euros dans le groupe bancaire évoqué dans la partie A.

1. Déterminer le nombre d'entreprises dont le compte courant a un solde moyen supérieur ou égal à 50 000 euros.
2. Déterminer le nombre d'entreprises dont le compte courant a un solde moyen compris au sens large entre 50 000 et 100 000 euros.

Exercice 2 **9 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Un atelier produit en grande série des pièces destinées à l'équipement informatique.

A. Probabilités conditionnelles

L'atelier utilise deux machines M_1 et M_2. La fabrication est répartie entre les deux machines.
La machine M_1 fabrique 80 % des pièces dont 1 % sont défectueuses et la machine M_2 fabrique 20 % des pièces dont 2 % sont défectueuses.
On prélève au hasard une pièce dans la production d'une journée.
On désigne par D l'évènement : « la pièce est défectueuse » ; par A l'évènement : « la pièce a été fabriquée par la machine M_1 » et par B l'évènement : « la pièce a été fabriquée par la machine M_2 ».

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé $P(\text{A})$, $P(\text{B})$, $P_{\text{A}}(\text{D})$ et $P_{\text{B}}(\text{D})$.
(On rappelle que $P_{\text{A}}(\text{D}) = P(\text{D}/\text{A})$ est la probabilité de l'évènement D sachant que l'évènement A est réalisé.)
2. a. Calculer $P(\text{A} \cap \text{D})$ et $P(\text{B} \cap \text{D})$.
   b. En déduire $P(\text{D})$.
3. Calculer la probabilité qu'une pièce ait été fabriquée par la machine M_1 sachant qu'elle est défectueuse. Arrondir à 10^{-2}.

B. Loi binomiale

On admet dans cette partie que $P(\text{D}) = 0,012$. On prélève au hasard pour vérification 50 pièces dans un stock important. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 pièces. On note X la variable aléatoire qui à chaque prélèvement de ce type associe le nombre de pièces défectueuses de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, deux pièces exactement soient défectueuses. Arrondir à 10^{-2}.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux pièces soient défectueuses. Arrondir à 10^{-2}.

C. Loi normale

Dans cette question on s'intéresse à la masse des pièces.
On prélève une pièce au hasard dans un lot important. On admet que la variable aléatoire Y qui à chaque pièce de ce lot associe sa masse en kilogrammes suit la loi normale de moyenne 2 et d'écart type $0,1$.

1. Calculer $P(2 \leqslant Y \leqslant 2,1)$. Arrondir à 10^{-2}.

2. Calculer $P(Y \geqslant 2)$.

Brevet de technicien supérieur session 2008
Comptabilité et gestion des organisations

Exercice 1 **10 points**

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{3}{1 + 125\,504\text{e}^{-1,9x}}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ où l'unité est 2 cm.

1. **a.** On admet que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty}\left(125\,504\text{e}^{-1,9x}\right) = 0$; en déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

   b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

2. **a.** Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0~;~+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{715\,372,8\text{e}^{-1,9x}}{\left(1 + 125\,504\text{e}^{-1,9x}\right)^2}$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $[0~;~+\infty[$.

   c. Donner le tableau de variations de f sur $[0~;~+\infty[$.

3. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	0	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	0	0,01						

   b. Tracer la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère défini au début. Sur l'axe des abscisses, commencer la graduation à 3.

4. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2,5$. On fera apparaître sur la figure les constructions utiles.

B. Calcul intégral

1. Vérifier que, pour tout nombre réel x de $[0~;~+\infty[$, $f(x) = \dfrac{3\text{e}^{1,9x}}{\text{e}^{1,9x} + 125\,504}$.

2. Soit F la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{3}{1,9}\ln\left(\text{e}^{1,9x} + 125\,504\right)$.
   Démontrer que F est une primitive de f sur $[0~;~+\infty[$.

3. **a.** Calculer la valeur moyenne V_m de f sur $[0~;~9]$.

   b. Donner la valeur approchée de V_m arrondie à 10^{-2}.

C. Application de la partie A

Dans cette partie, utiliser des résultats obtenus à la partie A.

On admet que le nombre de systèmes GPS vendus en France au cours de l'année $(2000 + n)$ est égal à $f(n)$ millions où f est la fonction définie dans la partie A.

1. Déterminer le nombre de systèmes GPS vendus en France en 2005.

2. Donner le nombre total de systèmes GPS vendus pendant les quatre années 2004, 2005, 2006 et 2007.
3. Indiquer au cours de quelle année les ventes de systèmes GPS dépassent 2 500 000 unités.

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans cet exercice on s'intéresse aux factures comptabilisées chaque mois dans un grand garage.

A. Loi binomiale

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

À la fin d'un mois donné, on considère une liasse importante de factures.
On note E l'évènement : « une facture prélevée au hasard dans la liasse de factures est erronée. »
On suppose que $P(E) = 0,03$.
On prélève au hasard 20 factures dans la liasse pour vérification. La liasse contient assez de factures pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 factures.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de factures de ce prélèvement qui sont erronées.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'aucune facture de ce prélèvement ne soit erronée.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux factures soient erronées.

B. Loi normale

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

À la fin d'un autre mois, on s'intéresse au montant de l'ensemble des factures éditées pendant ce mois.
On note Y la variable aléatoire qui, à chaque facture prélevée au hasard dans l'ensemble des factures éditées pendant le mois, associe son montant en euros. On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 840 et d'écart type 400.

1. Calculer $P(Y \leqslant 1500)$.
2. Pour les factures dont le montant est supérieur ou égal à 600 euros et inférieur ou égal à 1 500 euros, le garage propose le paiement en trois fois sans frais.

   Calculer la probabilité qu'une facture prélevée au hasard dans l'ensemble des factures éditées pendant le mois puisse être réglée en trois fois sans frais, c'est-à-dire : $P(600 \leqslant Y \leqslant 1500)$.

C. Probabilités conditionnelles

Les factures du garage sont de deux types : les factures provenant de l'atelier de mécanique et les factures provenant de l'atelier de carrosserie.
On admet, qu'un autre mois, 65 % des factures proviennent de l'atelier de mécanique et le reste de l'atelier de carrosserie.

Dans l'ensemble des factures de ce mois, 2 % des factures provenant de l'atelier de mécanique sont erronées et 1 % des factures provenant de l'atelier de carrosserie sont erronées.
On prélève au hasard une facture dans l'ensemble des factures de ce mois. Toutes les factures ont la même probabilité d'être prélevées.
On considère les évènements suivants :

M : « la facture prélevée provient de l'atelier de mécanique » ;
C : « la facture prélevée provient de l'atelier de carrosserie » ;
D : « la facture est erronée ».

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé les probabilités $P(M)$, $P(C)$, $P_M(D)$ et $P_C(D)$.
(*On rappelle que* $P_M(D) = P(D/M)$ *est la probabilité de l'évènement D sachant que l'évènement est réalisé*).

2. **a.** Calculer les valeurs exactes des probabilités $P(D \cap M)$ et $P(D \cap C)$.
b. Déduire de ce qui précède $P(D)$.

3. Calculer la probabilité que la facture prélevée provienne de l'atelier de carrosserie sachant qu'elle est erronée. Arrondir à 10^{-4}.

Brevet de technicien supérieur session 2008
Comptabilité et gestion des organisations Polynésie

Exercice 1 **12 points**

Les parties A, B et C de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Utilisation d'un ajustement affine

La Fédération Française de Franchise a publié le nombre de franchisés établis en France entre 2000 et 2005. Le tableau suivant, où t_i désigne le rang de l'année, donne, en milliers, le nombre y_i de ces franchisés, au premier janvier de chaque année.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang de l'année : t_i	1	2	3	4	5	6
Nombre de franchisés : y_i	30,63	31,781	33,26	34,745	36,773	39,51

1. On effectue le changement de variable : $x_i = t_i^2$.
   Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant :

$x_i = t_i^2$						
y_i	30,63	31,781	33,26	34,745	36,773	39,51

2. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique de variables x et y. Arrondir à 10^{-2}.
3. **a.** Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression de y en x, sous la forme $y = ax + b$, où a et b sont à arrondir à 10^{-3}.

   b. En déduire une expression de y en fonction de t.
4. À l'aide de la question précédente :

   a. Donner une estimation du nombre de franchisés installés en France au premier janvier 2008 ;

   b. Estimer l'année au cours de laquelle, le nombre de franchisés installés en France dépassera, pour la première fois, les 60 000.

B. Utilisation d'une suite géométrique

On peut constater qu'entre 2004 et 2005 le nombre de franchisés considéré dans la partie A a augmenté d'environ 8 %.

Dans les questions qui suivent, on admet qu'à partir du premier janvier 2005, le nombre de franchisés augmente de 5 % par an.

1. Le premier janvier 2005, il y avait 39 510 franchisés. Calculer le nombre de franchisés au premier janvier 2006.
2. On note u_n le nombre de franchisés au premier janvier de l'année $(2005 + n)$, où n est un entier naturel. On a donc $u_0 = 39510$.

   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

   b. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
3. **a.** Déterminer le plus petit entier p tel que $u_p > 60000$.

b. L'affirmation suivante :
« le nombre de franchisés dépassera 60 000 pour la première fois au cours de l'année 2010 »est-elle vraie ou fausse ?
Donner la réponse sans justification.

C. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[1 ; 10]$ par

$$f(x) = 8\ln(16x - 10) + 7.$$

1. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $[1 ; 10]$.
  a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x de $[1 ; 10]$.
  b. Étudier le signe de $f'(x)$ quand x varie dans $[1 ; 10]$.

2. Établir le tableau de variations de f sur $[1 ; 10]$.

3. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-1}.
  b. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthogonal.
  On prendra pour unité 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 2 sur l'axe des ordonnées, la graduation commençant à 0 sur l'axe des abscisses et à 20 sur l'axe des ordonnées.
  c. Résoudre graphiquement dans $[1 ; 10]$ l'équation $f(x) = 35$. On fera apparaître sur le graphique les constructions utiles.

D. Application des résultats de la partie C

On admet que le chiffre d'affaires, en millions d'euros, d'un ensemble d'entrepreneurs est donné, pour l'année $(2000 + n)$, par $f(n)$ où f est la fonction étudiée dans la partie C.

1. Déterminer le chiffre d'affaires en millions d'euros, arrondi à 10^{-1}, pour l'année 2008.

2. En quelle année le chiffre d'affaires a-t-il dépassé 35 millions d'euros ?

Exercice 2 **8 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans une grande chaîne dc magasins, on s'intéresse au fonctionnement d'un certain modèle de téléviseur.

A. Loi binomiale

Dans cette partie les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-1}

On considère un stock important de téléviseurs de ce modèle.
On note E l'évènement : « un téléviseur prélevé au hasard dans le stock est défectueux. »
On suppose que $P(\text{E}) = 0,02$.
On prélève au hasard 100 téléviseurs dans le stock. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 téléviseurs.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de téléviseurs de ce prélèvement qui sont défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait exactement quatre téléviseurs défectueux.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au moins deux téléviseurs défectueux.

B. Loi normale

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}

Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque téléviseur de ce modèle prélevé au hasard dans le stock de la chaîne associe sa durée de fonctionnement sans panne, en années.
On admet que Y suit la loi normale de moyenne 6 et d'écart type 1.

1. Calculer $P(4 \leqslant Y \leqslant 8)$.
2. Un téléviseur est dit « amorti »si sa durée de fonctionnement sans panne est supérieure ou égale à 5 ans.
   Calculer la probabilité qu'un téléviseur prélevé au hasard dans le stock soit amorti.

C. Probabilités conditionnelles

Les téléviseurs de ce modèle proviennent de deux fournisseurs notés « fournisseur 1 »et « fournisseur 2 ».
Le fournisseur 1 a fourni 60 % des téléviseurs d'un lot important et le fournisseur 2 a fourni le reste de ce lot.
Dans ce lot, 1 % des téléviseurs provenant du fournisseur 1 sont défectueux et 1,5 % des téléviseurs provenant du fournisseur 2 sont défectueux.
On prélève au hasard un téléviseur dans ce lot. On considère les évènements suivants :

A : « le téléviseur prélevé provient du fournisseur 1 » ;
B : « le téléviseur prélevé provient du fournisseur 2 » ;
D : « le téléviseur prélevé est défectueux ».

Dans cette partie, on demande les valeurs exactes des probabilités.

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé les probabilités $P(\text{A})$, $P(\text{B})$, $P_{\text{A}}(\text{D})$ et $P_{\text{B}}(\text{D})$.
   (On rappelle que $P_{\text{A}}(\text{D}) = P(\text{D}/\text{A})$ est la probabilité de l'évènement D sachant que l'évènement A est réalisé.)
2. **a.** Calculer les valeurs exactes des probabilités $P(\text{D} \cap \text{A})$ et $P(\text{D} \cap \text{B})$.
   b. Déduire de ce qui précède la probabilité que le téléviseur prélevé soit défectueux.

Brevet de technicien supérieur session 2008
Comptabilité et gestion des organisations
Nouvelle–Calédonie

Exercice 1 **10 points**

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[4\,;\,20]$ par

$$f(x) = 20 - 3x + 6\mathrm{e}^{0,12x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe representative de f dans un repère orthonormal où l'unité est 1 cm pour 2.

1. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x de $[4\,;\,20]$, $f'(x) = 3\left(-1 + 0,24\mathrm{e}^{0,12x}\right)$.
   b. Résoudre dans $[4\,;\,20]$ l'équation : $-1 + 0,24\mathrm{e}^{0,12x} = 0$. Donner la valeur exacte de la solution x_0, puis sa valeur approchée arrondie à 10^{-2}.
   c. Résoudre dans $[4\,;\,20]$ l'inéquation : $-1 + 0,24\mathrm{e}^{0,12x} \geqslant 0$.
   d. Déduire du c. le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $[4\,;\,20]$.
2. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	4	8	11,89	16	18	20
$f(x)$			9,32			

3. Établir le tableau de variations de f. Dans ce tableau, on fera figurer les valeurs approchées de x_0 et $f(x_0)$ obtenues dans le tableau ci-dessus.
4. Construire la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère défini au début de cette partie.
5. Résoudre graphiquement dans $[4\,;\,20]$ l'équation $f(x) = 20$. On fera apparaître sur la figure les constructions utiles.

B. Calcul intégral

On note $I = \displaystyle\int_4^{20} f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Démontrer que $I = 50\left(\mathrm{e}^{2,4} - \mathrm{e}^{0,48}\right) - 256$.
2. **a.** En déduire la valeur moyenne V_m de la fonction f sur $[4\,;\,20]$.
   b. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de V_m.

C. Application de la partie A

Une entreprise produit, chaque jour, entre 4 et 20 tonnes de sel pour l'industrie. On admet que lorsque x tonnes de sel sont produites, avec $4 \leqslant x \leqslant 20$, le coût moyen de la production d'une tonne de sel est $f(x)$ dizaines d'euros, où f est la fonction définie au début de la partie A.

1. Déterminer la quantité de sel à produire pour que le coût moyen de production d'une tonne de sel soit minimal. Déterminer alors ce coût moyen en euros.

2. Déterminer la quantité de sel qu'il faut produire pour que le coût moyen de production d'une tonne de sel soit de 200 euros.

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Dans une société, on assemble et on installe un certain type d'équipement informatique pour les sièges sociaux de grandes entreprises.

A Probabilités conditionnelles

L'un des éléments de l'équipement, noté élément a, provient de deux fournisseurs, le fournisseur 1 et le fournisseur 2.
75 % des éléments a d'un stock important proviennent du fournisseur 1, le teste, provient du fournisseur 2.
1 % des éléments a provenant du fournisseur 1 sont défectueux.
2 % des éléments a provenant du fournisseur 2 sont défectueux.
On prélève au hasard un élément a dans le stock.
Tous les éléments a ont la même probabilité d'être prélevés.
On considère les évènements suivants :
F_1 : « l'élément prélevé provient du fournisseur 1 » ;
F_2 « l'élément prélevé provient du fournisseur 2 » ;
D : « l'élément prélevé est défectueux ».

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé les probabilités $P(F_1)$, $P(F_2)$, $P_{F_1}(D)$ et $P_{F_2}(D)$.
(On rappelle que $P_{F_1}(D) = P(D/F_1)$ est la probabilité de l'évènement D sachant que l'évènement F_1 est réalisé).
2. a. Calculer les valeurs exactes des probabilités $P(D \cap F_1)$ et $P(D \cap F_2)$.
   b. En déduire la probabilité que l'élément prélevé soit défectueux.
3. Calculer la probabilité que l'élément provienne du fournisseur I sachant qu'il est défectueux.

B Loi binomiale

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à10^{-2}

Dans cette question on s'intéresse à un autre élément de l'équipement, noté b.
On considère un lot important d'éléments b.
On note E l' évènement « un élément b prélevé au hasard dans le lot est défectueux ».
On suppose que $P(E) = 0,025$.
On prélève au hasard 20 éléments b dans le lot pour vérification. Le lot est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 éléments b.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre d'éléments b de ce prélèvement qui sont défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait exactement deux éléments b défectueux.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au moins deux éléments b défectueux.

C. Lois normales

Dans cette partie on s'intéresse au temps nécessaire pour la mise en service du système constitué par un élément a et un élément b.

On note Y_a la variable aléatoire qui, à chaque élément a prélevé au hasard dans un stock important d'éléments a, associe le temps, en heures, nécessaire à sa mise en service.

On admet que la variable aléatoire Y_a suit la loi normale de moyenne 22 et d'écart type 3.

On note Y_b la variable aléatoire qui, à chaque élément b prélevé au hasard dans un stock important d'éléments b, associe le temps, en heures, nécessaire à sa mise en service.

On admet que la variable aléatoire Y_b suit la loi normale de moyenne 25 et d'écart type 4.

On admet que les deux variables aléatoires Y_a et Y_b sont indépendantes.

On note Z la variable aléatoire qui à tout système constitué par un élément a et un élément b prélevés au hasard dans les stocks, associe le temps nécessaire, en heures, à sa mise en service.

On admet que $Z = Y_a + Y_b$.

1. Justifier que la variable aléatoire Z suit la loi normale de moyenne 47 et d'écart type 5.
2. Déterminer la probabilité qu'un système constitué par un élément a et un élément b prélevés au hasard dans les stocks, soit mis en service en moins de 50 heures.
   Arrondir à 10^{-3}.

Brevet de technicien supérieur session 2009 Métropole Comptabilité et gestion des organisations

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendants.

Une entreprise réalise et commercialise des compositions florales ainsi que des produits pour le jardin.

A. Évènements indépendants

Dans cette partie, on demande les valeurs exactes des probabilités

L'entreprise confectionne ses compositions florales avec des bulbes de fleurs qu'elle reçoit en grande quantité. Chaque bulbe peut présenter deux défauts que l'on désigne par défaut a et défaut b.
On prélève un bulbe au hasard dans un stock important.
On note A l'évènement : « le bulbe présente le défaut a » et on note B l'évènement : « le bulbe présente le défaut b ».
On admet que les probabilités des évènements A et B sont $P(A) = 0,015$ et $P(B) = 0,02$. On suppose que les deux évènements A et B sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l'évènement E_1 : « le bulbe présente le défaut a et le défaut b ».
2. Calculer la probabilité de l'évènement E_2 ; « le bulbe présente au moins un des deux défauts ».
3. Calculer la probabilité de l'évènement E_3 : « le bulbe ne présente aucun des deux défauts ».

Dans ce qui suit, tous les résultats approchés sont à arrondir à10^{-2}.

B. Loi binomiale

On s'intéresse à une livraison importante de compositions florales d'un certain type, destinée à une chaine d'hypermarchés.
On note D l'évènement : « une composition florale prélevée au hasard dans la livraison est défectueuse ».
On suppose que $P(D) = 0,025$.
On prélève au hasard 12 compositions dans la livraison pour vérification. La livraison contient assez de compositions pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 12 compositions.
On considère la variable aléatoire X qui à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de compositions de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement il y ait exactement deux compositions défectueuses.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au plus une composition défectueuse.

C. Loi normale et somme de variables indépendantes

L'entreprise commercialise deux types d'engrais : le type C_1 en poudre, et le type C_2 en granulés.

1. On note X_1, la variable aléatoire qui, à toute semaine prise au hasard pendant une année associe la demande en kilogrammes d'engrais de type C_1, pour cette semaine.

On suppose que la variable aléatoire X_1, suit la loi normale de moyenne 160 et d'écart type 32.

Calculer $P(X_1 \leqslant 200)$.

2. On note X_2, la variable aléatoire qui, à toute semaine prise au hasard pendant une année associe la demande en kilogrammes d'engrais de type C_2, pour cette semaine.

On suppose que la variable aléatoire X_2, suit la loi normale de moyenne 77 et d'écart type 28.

On note Y la variable aléatoire qui, à toute semaine prise au hasard pendant une année associe la demande totale en kilogrammes d'engrais de type C_1, et de type C_2, pour cette semaine.

On a $Y = X_1 + X_2$.

On suppose que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes. On admet que Y suit une loi normale de moyenne m et d'écart type a.

a. Justifier que $m = 237$ et qu'une valeur approchée de a arrondie à 10^{-2}, est 42,52.

b. Calculer la probabilité $P(Y \geqslant 340)$.

c. Le coût de stockage de cet engrais est élevé. L'entreprise a-t-elle raison de limiter Ia production totale hebdomadaire de cet engrais à 340 kilogrammes ?

Exercice 2 **10 points**

A. Résolution graphique d'une inéquation

Soit f la fonction définie sur $[1\ ;\ 10]$ par

$$f(x) = \frac{10}{\ln(2x+3)}$$

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal est tracée sur l'annexe à rendre avec la copie.

Résoudre graphiquement dans $[1\ ;\ 10]$ I'inéquation $f(x) \leqslant 3,5$. Faire apparaître sur la figure les constructions utiles.

B. Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur [0 ; 10J par

$$g(x) = 5 - \mathrm{e}^{-0,2x+1}$$

1. **a.** Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de $[1\ ;\ 10]$.

b. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $[1\ ;\ 10]$,

2. Donner la tableau de variation de g sur $[1\ ;\ 10]$,

3. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	1	2	3	4	5	6	8	10
$g(x)$				3,78	4			

b. Tracer la courbe représentative Γ de g sur l'annexe à rendre avec la copie, dans le même repère que la courbe $\mathscr{C}$.

4. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ où f est la fonction définie dans la partie A. Faire apparaître sur la figure les constructions utiles.

C. Calcul intégral

1. Soit G la fonction définie sur $[1~;~10]$ par

$$G(x) = 5x + 5\mathrm{e}^{-0,2x+1}.$$

Démontrer que la fonction G est une primitive sur $[1~;~10]$ de la fonction g définie au début de la partie B.

2. **a.** Démontrer que la valeur moyenne de la fonction g sur $[1~;~10]$ est :

$$V_m = \frac{45 + 5\mathrm{e}^{-1} - 5\mathrm{e}^{0,8}}{9}.$$

b. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de V_m.

D. Application des parties A et B

On considère un produit dont le prix de la tonne, exprimé en dizaines d'euros, est noté x.
La **demande**, $d(x)$ est la quantité de ce produit, exprimée en milliers de tonnes que les consommateurs sont prêts à acheter au prix de x dizaines d'euros la tonne.
L'offre, $o(x)$ est la quantité de ce produit, exprimée en milliers de tonnes, que les producteurs sont prêts à vendre au prix de x dizaines d'euros la tonne.
On appelle **prix d'équilibre** de ce produit le prix pour lequel l'offre et la demande sont égales.
On admet que, pour un prix du produit de x dizaines d'euros la tonne, avec $1 \leqslant x \leqslant 10$, la demande est $d(x) = f(x)$ et l'offre est $o(x) = g(x)$, où f et g sont les fonctions définies dans les parties A et B.

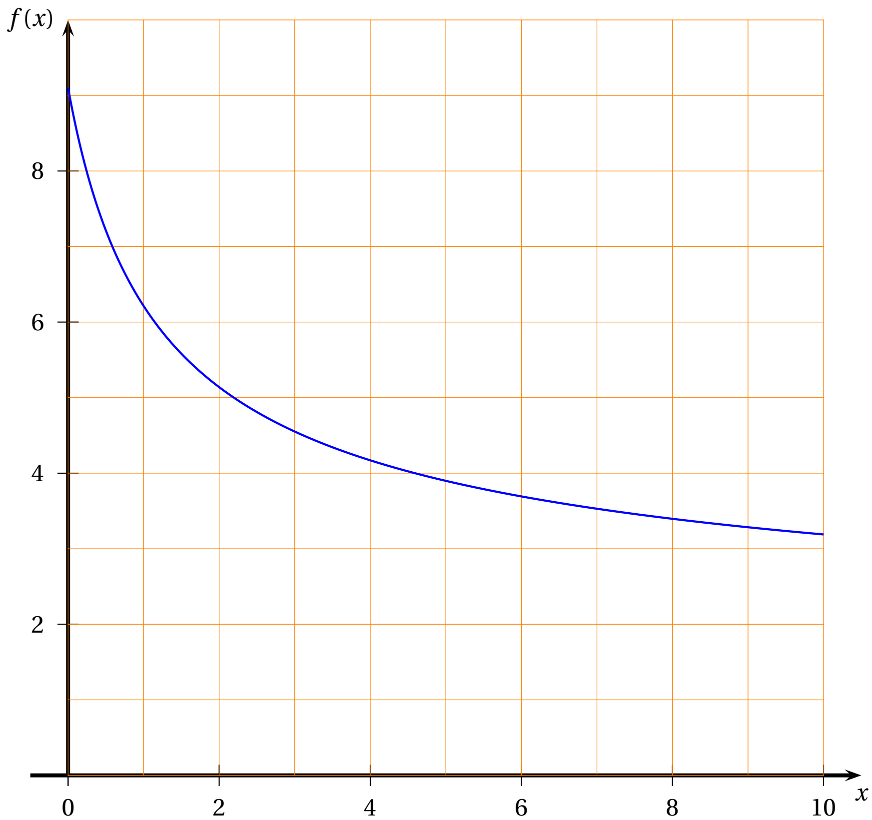
1. En utilisant un résultat de la partie A ou de la partie B, indiquer à partir de quel prix de la tonne en euros, la demande est inférieure ou égale à 3 500 tonnes.

2. **a.** Déduire d'un résultat de la partie B une valeur approchée du prix d'équilibre en euros.

b. Donner une valeur approchée de la demande correspondant au prix d'équilibre.

Annexe

Exercice 2



Brevet de technicien supérieur session 2009 Comptabilité et gestion des organisations Polynésie

Exercice 1 **9 points**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

A. Loi binomiale et loi normale

Dans cette partie, sauf mention particulière, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}

Dans le cadre de la lutte contre l'obésité et le diabète, on a testé un nouveau régime. Les patients sont suivis durant quatre ans. Si au terme de ces quatre ans, le poids est stabilisé à une valeur satisfaisante, le régime est considéré comme un succès.

Quatre ans après le début de l'étude, on considère le fichier constitué par les dossiers d'un grand nombre de patients ayant suivi le régime.
On note E l'évènement : « un dossier prélevé au hasard dans le fichier est celui d'un patient ayant suivi Ie régime avec succès ».
On suppose que $p(E) = 0,375$.
On prélève au hasard 100 dossiers médicaux dans le fichier. Le nombre de dossiers-dans le fichier est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvemem à un tirage avec remise de 100 dossiers.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de dossiers correspondant à des patients ayant suivi le régime avec succès.

1. **a.** Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

   b. Calculer la probabilité que 25 dossiers de ce prélèvement correspondent à des patients ayant suivj le régime avec succès.
   Pour ce calcul on peut prendre $\mathrm{C}_{100}^{25} \approx 2,425 \times 10^{23}$.

2. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale de moyenne 37,5 et d'écart type 4,8.

   On note Y une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 37,5 et d'écart type 4,8.

   a. Justifier les valeurs des paramètres de cette loi normale (4,8 est une valeur approchée à 10^{-1}).

   b. Calculer la probabilité qu'au moins la moitié des dossiers prélevés correspondent à des patients ayant suivi le régime avec succès, c'est-à-dire calculer $P(Y \geqslant 49,5)$.

B. Probabilités conditionnelles

Dans un département, on dispose des informations suivantes sur l'effet de deux types de régime.
70 % des patients de ce département ont suivi le régime de type 1 et 30 % ont suivi un régime de type 2.
Parmi les patients ayant suivi le régime de type 1,30 % seulement l'ont suivi avec succès, alors qu'il y a 55 % de réussite pour les patients ayant suivi le régime de type 2.
On prélève un dossier au hasard dans l'ensemble des dossiers des patients de ce département. On considère les évènements suivants :

– A : « Le dossier prélevé est celui d'un patient qui a suivi le régime de type 1 » ;
– B : « Le dossier prélevé est celui d'un patient qui a suivi le régime de type 2 » ;
– R : « Le dossier prélevé est celui d'un patient qui a suivi un des deux régimes avec succès ».

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(R)$ et $P_B(R)$.
(On rappelle que $P_A(R) = P(R/A)$ est la probabilité de l'évènement R sachant que l'évènement A est réalisé.)

2. **a.** Calculer $P(R \cap A)$ et $P(R \cap B)$.
b. En déduire $P(R)$.

3. Calculer la probabilité qu'un patient qui a suivi un des deux régimes avec succès, ait suivi le régime de type 2.

Exercice 2 **11 points**

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 3,87\mathrm{e}^{-0,26x} + 0,76.$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On prendra comme unités : 1 cm sur l'axe des : abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,26x} = 0$; en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
b. Déduire du a. que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

2. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x de $[0\,;\,+\infty[$.
b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout nombre réel x de $[0\,;\,+\infty[$.
c. Établir le tableau de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[[$.

3. Compléter, après l'avoir reproduit sur votre copie le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	1	2	3	5	7	9	12	15
$f(x)$	3,74						0,93	

4. Construire la droite Δ et la courbe $\mathcal{C}$ sur une feuille de papier millimétré.

5. **a.** Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$. Faire apparaître sur la figure les constructions utiles.
b. Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 1$. Donner la valeur exacte de la solution.

6. **a.** On note $I = \displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Démontrer que $I = \dfrac{387}{26}\left(1 - \mathrm{e}^{-2,6}\right) + 7,6$.
b. Donner la valeur approchée de I arrondie à 10^{-2}.

B. Application

Dans le cadre d'études sur la gestion des ressources naturelles dans un pays en voie de développement, on s'intéresse à la quantité de bois de chauffe, en kilogrammes, consommée quotidiennement par personne, pendant la saison sèche.
On admet que la quantité de bois de chauffe consommée quotidiennement par une personne vivant dans une exploitation abritant x personnes est $f(x)$ kilogrammes, où f est la fonction définie dans la partie A.

1. Déduire de la partie A le nombre de personnes vivant dans une exploitation où la consommation de bois de chauffe quotidienne pour une personne est de 1 kilogramme.

2. Calculer la consommation quotidienne totale en kilogrammes d'une exploitation où vivent 12 personnes. Arrondir à l'unité.

Brevet de technicien supérieur session 2009
Comptabilité et gestion des organisations
Nouvelle–Calédonie

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Dans cet exercice, on s'intéresse à la fabrication, dans une usine d'un grand groupe de l'industrie automobile, d'un certain modèle de véhicules à « moteur hybride ».
Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

A. Loi binomiale

Dans cette question on s'intéresse à un stock important de véhicules sortis des chaînes de montage de l'usine.
On appelle « véhicule défectueux » un véhicule possédant au moins un défaut. Il y a « beaucoup » de défauts possibles à la sortie d'une chaîne de montage.
On note E l 'évènement : « un véhicule prélevé au hasard dans le stock est défectueux ». On suppose que $P(E) = 0,2$.
On prélève au hasard 20 véhicules dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 véhicules.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de véhicules défectueux de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'un seul véhicule de ce prélèvement soit défectueux.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus un véhicule soit défectueux.

B. Loi normale

Dans cette partie, on s'intéresse au coût de remise en état des véhicules présentant un ceriain type de défaut. On considère la variable aléatoire C qui à chaque véhicule prélevé au hasard dans une grande série de véhicules présentant ce type de défaut associe le coût, en euros, de sa remise en état.
On suppose que la variable aléatoire C suit la loi nonnale de moyenne 500 et d'écart type 200.

1. Calculer $P(C \leqslant 700)$.
2. Calculer la probabilité que la remise en état d'un véhicule prélevé au hasard dans la série des véhicules présentant ce type de défaut coûte entre 200 et 800 euros.

C. Probabilités conditionnelles

Les véhicules proviennent de deux ateliers notés a et b.
On admet que pendant un mois donné, l'atelier a produit 40 % des véhicules et que le reste est produit par l'atelier b.
On admet que 10 % des véhicules provenant de l'atelier a sont défectueux et que 15 % des véhicules provenant de l'atelier b sont défectueux.

On prélève au hasard un véhicule dans l'ensemble de la production du mois des deux ateliers. Tous les véhicules ont la même probabilité d'être prélevés.
On considère les évènements suivants :
A : « le véhicule prélevé provient de l'atelier a » ;
B : « le véhicule prélevé provient de l'atelier b » ;
D : « le véhicule prélevé est défectueux ».

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P_B(D)$.
(On rappelle que $P_A(D) = P(D/A)$ est la probabilité de l'évènement D sachant que l'évènement A est réalisé).

2. **a.** Calculer les valeurs exactes des probabilités $P(D \cap A)$ et $P(D \cap B)$.
b. En déduire $P(D)$.

3. Calculer la probabilité qu'un véhicule provienne de l'atelier a sachant qu'il est défectueux.
Arrondir à 10^{-2}.

Exercice 2 **10 points**

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[6\,;30]$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 36\ln x + 150.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On prendra comme unités graphiques : 1 cm pour 5 sur l' axe des abscisses et 1 cm pour 100 sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x de $[6\,;30]$, $f'(x) = \dfrac{(x-6)(x+6)}{x}$.
b. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $[6\,;30]$.
c. Donner la tableau de variation de f sur $[6\,;30]$.

2. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit sur la copie, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à l'unité.

x	6	10	15	20	25	30
$f(x)$						

b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère défini au début.
c. Tracer sur la figure du b. la droite Δ d'équation $y = 22,5x$.

B. Calcul intégral

1. **a.** Soit H la fonction définie sur $[6\,;30]$ par $H(x) = x\ln x - x$.
Démontrer que H est une primitive sur $[6\,;30]$ de la fonction h définie par $h(x) = \ln x$.
b. Déduire du a. une primitive F sur $[6\,;30]$ de la fonction f définie dans la partie A.

2. **a.** On note $I = \displaystyle\int_6^{30} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Démontrer que $I = 8\,928 - 1\,080\ln 30 + 216\ln 6$.
b. En déduire la valeur moyenne V_m de f sur $[6\,;30]$.

C. Application économique

On s'intéresse à une entreprise qui fabrique et commercialise un certain type d'articles.
On admet que le coût total de production pour x articles produits, avec $6 \leqslant x \leqslant 30$, est $f(x)$ euros, où f est la fonction définie dans la partie A.

1. Chaque article fabriqué est vendu 22,50 euros. Déterminer en fonction de x la recette $r(x)$, en euros, pour x articles vendus.

2. Déterminer le bénéfice en euros pour 20 articles fabriqués et vendus.

3. À l'aide du graphique réalisé dans la partie A, déterminer pour quelle valeur de x le bénéfice est maximal.

Brevet de technicien supérieur session 2010
Métropole Comptabilité et gestion des organisations

Exercice 1 **12 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

A. Loi binomiale

Dans cette partie, les probabilités sont à arrondir à 10^{-3}

On a observé que 87 % des entreprises créées en France en 2008 n'emploient aucun salarié.
On prélève au hasard huit entreprises parmi l'ensemble des entreprises créées en France en 2008. Le nombre d'entreprises créées est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de huit entreprises.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de ce type, associe le nombre d'entreprises qui n'emploient aucun salarié.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement les huit entreprises n'emploient aucun salarié.
3. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement au moins sept des entreprises n'emploient aucun salarié.

B. Loi normale

Cette partie est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des deux questions, une seule réponse A, B, C est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.
Notation :
Chaque réponse juste rapporte $1,5$ *point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

On appelle Y une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 874 et d'écart type $10,5$.

1. La valeur approchée arrondie à 10^{-2} de $P(859,5 \leqslant Y \leqslant 890,5)$ est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
0,58	0,03	0,86

2. La valeur approchée arrondie à 10^{-2} de $P(Y \geqslant 880,5)$ est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
0,27	0,73	0,84

C. Étude d'une suite

On se propose d'étudier l'évolution de la capacité mondiale de production d'énergie éolienne en mégawatts (MW).
On dispose des données suivantes : en 2008, cette capacité est égale à 120 791 MW.
On prévoit que cette capacité augmente de 20 % chaque année à partir de 2008.

1. Déterminer les capacités mondiales prévues pour 2009 et 2010 sous cette hypothèse.

2. On note u_n la capacité mondiale de production d'énergie éolienne l'année $2008+n$. On a donc $u_0 = 120\,791$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

b. Donner l'expression de u_n en fonction de n.

3. a. Déterminer le plus petit entier p tel que : $(1,2)^p \geqslant \dfrac{250\,000}{120\,791}$.

b. En déduire, en le justifiant, à partir de quelle année on peut prévoir que la capacité mondiale de production d'énergie éolienne dépassera 250 000 MW.

Exercice 2 **8 points**

A. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[1\,;\,13]$ par :

$$f(x) = 3x + 14 - 12\ln(2x).$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$, dans un repère orthonormal est donnée en annexe à rendre avec la copie.

1. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $[1\,;\,13]$.

a. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $[1\,;\,13]$.

b. Montrer que, pour tout x de $[1\,;\,13]$, $f'(x) = \dfrac{3x-12}{x}$.

c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[1\,;\,13]$.

d. Construire le tableau de variations de f sur $[1\,;\,13]$.

2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 4$.
On fera apparaître sur la figure donnée en annexe les traits de constructions utiles et on donnera des valeurs approchées arrondies à 10^{-1} des solutions.

B. Calcul intégral

1. Soit F la fonction définie sur $[1\,;\,13]$ par

$$F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 26x - 12x\ln(2x).$$

Vérifier que F est une primitive de f sur $[1\,;\,13]$.

2. On note $I = \displaystyle\int_1^{13} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Démontrer que $I = 564 - 156\ln(26) + 12\ln(2)$.

3. En déduire la valeur exacte de la valeur moyenne V_m de la fonction f sur $[1\,;\,13]$. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-1} de V_m.

C. Application de la partie A

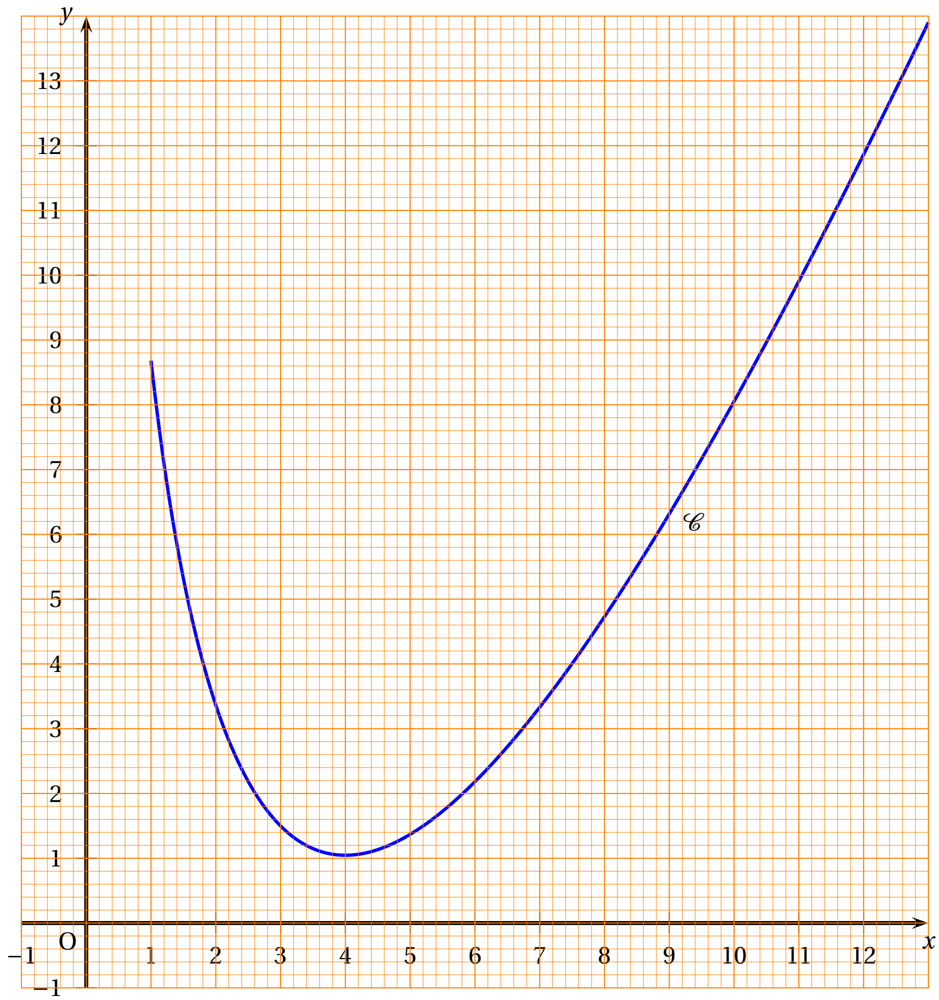
Une entreprise fabrique, chaque jour, entre 100 et 1 300 objets identiques.
On admet que lorsque x centaines d'objets sont fabriqués, $1 \leqslant x \leqslant 13$, le coût moyen de fabrication d'un objet est $f(x)$ euros où f est la fonction qui a été définie dans la partie A.

1. **a.** Déterminer la quantité de pièces à fabriquer pour que le coût moyen soit minimal.

   b. Déterminer alors ce coût moyen. Arrondir au centime d'euro.

2. Utiliser les résultats de la partie A pour déterminer les quantités d'objets à fabriquer afin que le coût moyen de fabrication d'un objet soit inférieur ou égal à 4 euros.

Annexe à rendre avec la copie



Brevet de technicien supérieur session 2010
Comptabilité et gestion des organisations
Nouvelle–Calédonie

Exercice 1 **10 points**

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[1\,;\,100]$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{0,02x+0,28}}{x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. On prend comme unités graphiques 1 cm pour 10 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 0,1 sur l'axe des ordonnées.

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Montrer que, pour tout x de $[1\,;\,100]$: $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,02x+0,28}}{x^2}(0,02x - 1)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;\,100]$.

2. Établir le tableau de variations de f sur $[1\,;\,100]$. On complètera ce tableau avec des valeurs exactes.

3. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	1	5	10	20	50	80	100
$f(x)$	1,35				0,07		

4. Construire la courbe $\mathcal{C}$ sur une feuille de papier millimétré.

5. Résoudre graphiquement dans $[1\,;\,100]$ l'inéquation $f(x) \leqslant 0,3$. On fera apparaître sur la figure les constructions utiles.

B. Calcul intégral

Soit g la fonction définie sur $[1\,;\,100]$ par

$$g(x) = 10\mathrm{e}^{0,02x+0,28}.$$

On note $I = \displaystyle\int_1^{100} g(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Démontrer que $I = 500\left(\mathrm{e}^{2,28} - \mathrm{e}^{0,3}\right)$.

2. En déduire la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;\,100]$.

C. Application des parties A et B

Une entreprise fabrique et vend chaque jour un certain type d'articles.
Le coût de production, en euros, d'un article en fonction du nombre x de dizaines d'articles fabriqués est $f(x)$, où f est la fonction définie au début de la partie *A*.

1. Déduire de la partie *A* le nombre d'articles que l'entreprise doit fabriquer pour que le coût unitaire de production soit inférieur ou égal à 30 centimes d'euros.
2. **a.** Justifier que le nombre $g(x)$ défini dans la partie B représente le coût total de production de x dizaines d'articles fabriqués par l'entreprise.

   b. Donner à l'aide d'une phrase, une interprétation économique du résultat obtenu à la question **2.** de la partie *B*.

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Une chaîne de magasins de bricolage commercialise deux types de ponceuses : des ponceuses « elliptiques » et des ponceuses « à bande ».

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}

A. Loi binomiale

On note D l'évènement : « Une ponceuse elliptique prélevée au hasard dans un stock important de la chaîne est défectueuse ».
On suppose que $P(D) = 0,08$.
On prélève au hasard 25 ponceuses elliptiques dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 25 ponceuses.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de ponceuses défectueuses de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait exactement quatre ponceuses défectueuses.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au moins une ponceuse défectueuse.
4. **a.** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

   b. La réparation d'une ponceuse défectueuse coûte 30 euros. Quelle est, pour un lot de 25 ponceuses elliptiques, le montant moyen des réparations des ponceuses elliptiques défectueuses ?

B. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

On note R l'évènement : « Une ponceuse à bande prélevée au hasard dans un lot important provenant du fabricant nécessite un réglage avant sa commercialisation ».
On suppose que $P(R) = 0,45$.
On prélève au hasard un lot de 50 ponceuses à bande pour vérification. Le lot est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 ponceuses.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de ponceuses à bandes de ce prélèvement nécessitant un réglage.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres 50 et $0,45$ (**ce résultat n'a pas à être justifié**).
On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de moyenne $22,5$ et d'écart type $3,5$.
On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne $22,5$ et d'écart type $3,5$.

1. Justifier le choix des paramètres de cette loi normale $\left(3,5\right.$ est une valeur approchée arrondie à $\left.10^{-1}\right)$.
2. Calculer la probabilité qu'au moins 25 ponceuses nécessitent un réglage c'est à dire calculer $P(Z \geqslant 24,5)$.

C. Probabilités conditionnelles

Les ponceuses à bande proviennent de deux fabricants, notés « fabricant 1 »et « fabricant 2 ».
50 % des ponceuses provenant du fabricant 1 nécessitent un réglage et 37 % des ponceuses provenant du fabricant 2 nécessitent un réglage.
On prélève au hasard une ponceuse dans un stock important contenant 60 % de ponceuses provenant du fabricant 1 et le reste du fabricant 2.
On définit les évènements suivants :

A : « La ponceuse provient du fabricant 1 » ;
B : « La ponceuse provient du fabricant 2 » ;
E : « La ponceuse nécessite un réglage ».

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé les probabilités $P(A)$; $P(B)$; $P_A(E)$ et $P_B(E)$.
2. Calculer $P(A \cap E)$ et $P(B \cap E)$. En déduire $P(E)$.
3. Calculer la probabilité que la ponceuse provienne du fabricant 1 sachant qu'elle nécessite un réglage.

Brevet de technicien supérieur session 2011 Métropole Comptabilité et gestion des organisations

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes
Un grossiste spécialisé dans le jardinage reçoit des sachets de graines d'aubergines « bio » (c'est-à-dire issues de l'agriculture biologique).

A. Évènements indépendants, probabilités conditionnelles

Le grossiste reçoit ces sachets en grande quantité.
Chaque sachet peut présenter deux défauts notés respectivement « a » et « b ».
Le défaut « a » consiste en la présence de désherbants chimiques.
Le défaut « b » consiste en la présence de pesticides.
On prélève un sachet au hasard dans une importante livraison.
L'évènement « le sachet présente le défaut « a » est noté A et l'évènement « le sachet présente le défaut « b » est noté B.
Des études statistiques ont permis d'établir que $P(A) = 0,02$ et $P(B) = 0,03$. On suppose que ces deux évènements sont indépendants.

1. On note E_1 l'évènement : « le sachet présente les deux défauts « a » et « b » ».
   Calculer $P(E_1)$.
2. On dit qu'un sachet est défectueux s'il présente au moins un des deux défauts.
   On note E_2 l'évènement : « le sachet est défectueux ».
   Calculer $P(E_2)$.
3. On note E_3 l'évènement : « le sachet ne présente aucun défaut ».
   Calculer $P(E_3)$.
4. Calculer la probabilité que le sachet présente les deux défauts sachant qu'il est défectueux.
   Le résultat sera arrondi à 10^{-4}.

Dans tout ce qui suit, les probabilités sont à arrondir à 10^{-4}

B. Loi binomiale

On note D l'évènement « un sachet prélevé dans un stock important est défectueux ».
On suppose que $P(D) = 0,05$.
On prélève au hasard 40 sachets pour vérification, le stock étant assez important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui à tout prélèvement de 40 sachets associe le nombre de sachets défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité pour que dans un tel prélèvement, il y ait exactement 2 sachets défectueux.
3. Calculer la probabilité pour que dans un tel prélèvement, il y ait au moins un sachet défectueux.

C. Loi normale

On s'intéresse dorénavant à la masse d'un sachet.
La variable aléatoire Y qui à chaque sachet associe sa masse en grammes est notée Y.
On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 120 et d'écart-type 8.

1. Calculer $P(Y \geqslant 104)$.
2. Un sachet dont la masse en grammes n'est pas dans l'intervalle [104 ; 136J est rejeté. Calculer la probabilité qu'un sachet soit rejeté.

Exercice 2 **10 points**

A. Étude d'une fonction

La fonction f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{1}{1+4,9\mathrm{e}^{-0,125t}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère orthogonal (unités graphiques : 0,5 sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

1. On admet que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,125t} = 0$. Calculer la limite de f en $+\infty$.
   En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote D dont on donnera une équation.
2. Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les résultats à 10^{-2}.

t	0	5	10	15	20	25	30
$f(t)$							

3. **a.** Calculer la dérivée de f et vérifier que $f'(t) = \dfrac{0,6125\mathrm{e}^{-0,125t}}{\left(1+4,9\mathrm{e}^{-0,125t}\right)^2}$.

   b. Établir le tableau de variations de f.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite D.
5. Résoudre graphiquement l'équation $f(t) = 0,5$. Faire apparaître les traits utiles sur le graphique.

B. Valeur moyenne

1. On admet que $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,125t}}{4,9+\mathrm{e}^{0,125t}}$.
   Vérifier que la fonction F définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(t) = 8\ln\left(4,9+\mathrm{e}^{0,125t}\right)$ est une primitive de f.
2. Démontrer que la valeur moyenne de f sur [10 ; 20] est : $\mathrm{V}_m = 0,8\ln\left(\dfrac{4,9+\mathrm{e}^{2,5}}{4,9+\mathrm{e}^{1,25}}\right)$.
3. Donner une valeur approchée de V_m à 10^{-3} près.

C. Applications des parties A et B

Une étude statistique a établi qu'à partir de l'année 1990, le pourcentage des ménages équipés d'un four à micro-ondes, dans un département, est donné approximativement par la formule :

$$f(t) = \frac{1}{1+4,9\mathrm{e}^{-0,125t}}$$ où t désigne le nombre d'années écoulées depuis 1990.

Par exemple $f(0) \approx 0,17$; en 1990 il y avait 17 % des ménages équipés d'un four à micro-ondes.

1. Calculer le pourcentage des ménages ayant cet équipement en 2010.
   Le résultat sera arrondi à 10^{-2}
2. Déduire de la partie A., l'année à partir de laquelle 50 % des ménages sont équipés d'un four à micro-ondes.
3. À l'aide d'une phrase, interpréter le résultat obtenu au 3. de la partie B.

Brevet de technicien supérieur session 2011 Polynésie Comptabilité et gestion des organisations

Exercice 1 **9 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Une usine fabrique en grande quantité deux types de pièces métalliques pour l'industrie : des pièces triangulaires et des pièces carrées.

A. Probabilités conditionnelles

On admet que 40 % des pièces de la production sont triangulaires, le reste est constitué par les pièces carrées.
Parmi les pièces triangulaires, 70 % ont une masse égale à 30 grammes, les autres ont une masse égale à 10 grammes.
Parmi les pièces carrées, 80 % ont une masse égale à 30 grammes, les autres ont une masse égale à 10 grammes.
On prélève au hasard une pièce dans la production d'une journée de ces deux types de pièces.
On considère les évènements suivants :
T : « la pièce prélevée est triangulaire » ;
M : « la pièce prélevée a une masse égale à 30 grammes ».

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé : $P(T)$, $P_T(M)$ et $P_{\overline{T}}(M)$.
(On rappelle que $P_T(M) = P(M/T)$ est la probabilité de l'évènement M sachant que l'évènement T est réalisé.)
2. Calculer $P(M \cap T)$ et $P\left(M \cap \overline{T}\right)$.
3. Déduire de ce qui précède que $P(M) = 0,76$.
4. Calculer la probabilité qu'une pièce soit carrée sachant que sa masse est égale à 30 grammes.
Arrondir à 10^{-2}.

B. Évènements indépendants

Les pièces sont susceptibles de présenter deux défauts appelés « défaut 1 » et « défaut 2 ».
On prélève une pièce au hasard dans un lot important.
On note D_1 l'évènement : « la pièce présente le défaut 1 » ;
On note D_2 l'évènement : « la pièce présente le défaut 2 ».
On admet que les probabilités des évènements D_1 et D_2 sont : $P(D_1) = 0,01$ et $P(D_2) = 0,02$.
On suppose de plus que les deux évènements D_1 et D_2 sont indépendants.

1. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans le lot présente les deux défauts.
2. Une pièce est jugée défectueuse si elle présente au moins l'un des deux défauts. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans le lot soit défectueuse.

C. Loi binomiale et loi normale

On note E l'évènement : « une pièce prélevée au hasard dans un stock important de pièces est triangulaire ».

On suppose que la probabilité de E est $0,40$.
On prélève au hasard 60 pièces dans le stock. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 60 pièces.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 60 pièces, associe le nombre de pièces triangulaires de ce prélèvement.

1. Expliquer pourquoi la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale de moyenne 24 et d'écart type 3,8.

a. Justifier les paramètres choisis pour la loi normale.

b. On note Y une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 24 et d'écart type 3,8.
Calculer la probabilité que le nombre de pièces triangulaires d'un prélèvement soit compris entre 20 et 28, c'est-à-dire : $P(19,5 \leqslant Y \leqslant 28,5)$. Arrondir à 10^{-2}.

Exercice 2 **11 points**

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,6]$ par

$$f(x) = \left(2x^2 + 3x\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. **a.** Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,6]$, $f'(x) = (-2x+3)(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\,6]$.

c. Établir le tableau de variation de f sur $[0\,;\,6]$. On y fera figurer la valeur approchée arrondie à 10^{-2} du maximum de la fonction f.

2. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$							

b. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$. On prendra pour unités graphiques : 2 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 4 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

c. Résoudre graphiquement dans $[0\,;\,6]$ l'équation $f(x) = 1$. Faire apparaître sur la figure les constructions utiles.

B Calcul intégral

1. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,6]$ par :

$$F(x) = \left(-2x^2 - 7x - 7\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

Démontrer que F est une primitive de f sur $[0\,;\,6]$.

2. On note $I = \displaystyle\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x$. Démontrer que $I = 7 - 121\mathrm{e}^{-6}$.

C. Application des résultats des parties A et B.

Une société extrait du gravier pour la construction d'autoroutes. Elle envisage l'ouverture d'un nouveau site d'extraction. On admet, qu'au bout de x centaines de jours d'exploitation, la production journalière sur ce site, exprimée en milliers de tonnes, est $f(x)$, où f est la fonction qui a été définie au début de la partie A.

1. Déterminer au bout de combien de jours après l'ouverture du site, la production journalière sera maximale. Quelle est cette production maximale en milliers de tonnes ?

2. Déterminer au bout de combien de jours après l'ouverture du site la production journalière après avoir atteint son maximum sera revenue à 1 000 tonnes.

3. Déduire de la partie B. la valeur moyenne, V_m, de f sur $[0\,;\ 6]$. Arrondir V_m à 10^{-3}.