

## ♣ Baccalauréat C Liban septembre 1983 ♣

### EXERCICE 1

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$(1+i)z^2 - 2z(1+2i) + 4i - 20 = 0.$$

2. On considère dans le plan complexe les points A et B d'affixes respectives  $z_A$  et  $z_B$ ,  $z_A$  et  $z_B$  étant les solutions de l'équation précédente avec cette partie réelle de  $z_A$  strictement négative.  
Vérifier que les points C et D d'affixes respectives  $z_C = 3 + 4i$  et  $z_D = -3i$ , forment avec les points A et B un carré dont on donnera l'affixe du centre O.
3. Soit les points A, B, C, O affectés respectivement des coefficients  $a, b, 4$  et  $-4$ .  
Déterminer  $a$  et  $b$  pour que O, origine du repère du plan complexe soit le barycentre du système  $\{A(a), B(b), C(4), D(-4)\}$ .

### EXERCICE 2

Soit  $\mathcal{E}$  l'espace rapporté au repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

$a$  et  $b$  étant deux réels non tous nuls, on envisage l'application affine de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  qui à tout point  $M$  de coordonnées  $(x; y; z)$ , associe le point  $M'$  de coordonnées  $(x'; y'; z')$  tel que

$$\begin{cases} x' &= a^2x - by - abz \\ y' &= abx + ay - b^2z \\ z' &= bx + az \end{cases}$$

On notera cette application affine  $\varphi_{a,b}$ .

1. Montrer que  $\varphi_{1,0}$  est un demi-tour dont on précisera l'axe.
2. Comment faut-il choisir  $a$  et  $b$  pour que  $\varphi_{a,b}$  soit une isométrie? Cette condition étant supposée réalisée, chercher l'ensemble des points invariants par  $\varphi_{a,b}$ . Quelle est la nature de  $\varphi_{a,b}$ ?

### PROBLÈME

1.  $n$  étant un entier naturel donné, différent de zéro, on envisage la fonction  $f_n$  de la variable réelle  $x$  définie sur  $\mathbb{R} - \{1\}$  par

$$x \mapsto f_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \ln|x-1|.$$

- a. Montrer que, pour tout  $x$  différent de 1, on a

$$f'_n(x) = \frac{x^n}{x-1}.$$

Étudier le sens de variation de  $f_n$ . (on distinguera les cas  $n$  pair et  $n$  impair). Montrer que la fonction  $f_n$  est monotone sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  et étudier les limites de  $f_n$  aux bornes de cet intervalle.

- b.** Faire l'étude complète des fonctions  $f_1$  et  $f_2$ . Tracer leurs représentations graphiques respectives  $C_1$  et  $C_2$  sur des feuilles distinctes.

- 2.** On envisage la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

- a.** Montrer que  $v_n$  est l'intégrale d'une fonction constante par morceaux majorant la fonction  $h : t \mapsto \frac{1}{t}$  sur l'intervalle  $[1 ; n + 1]$ .

Établir que

$$\ln(n + 1) < v_n < 1 + \ln n$$

(on pourra s'aider de la représentation graphique de la fonction  $h$  et de la subdivision  $(1, 2, 3, \dots, n, n + 1)$ ).

- b.** Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

- 3.** Montrer que pour tout  $x > 1$ , on a

$$f_n(x) > v_n + \ln(x - 1)$$

En déduire que, pour tout  $x$  fixé strictement supérieur à 1, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$$

- 4. a.** Montrer que

$$f_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) > v_n - \ln n.$$

En déduire que  $f_n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  est strictement positif.

- b.** Montrer qu'il existe un réel  $\alpha_n$  unique, strictement compris entre 1 et  $1 + \frac{1}{n}$ , pour lequel  $f_n(\alpha_n) = 0$ . Vérifier ce résultat sur  $C_1$  et  $C_2$ .

- 5. a.** Expliquer pourquoi on a pour tout  $x < 1$ ,

$$n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{t-1} dt$$

et pour tout  $x > 1$ ,

$$f_n(x) = \int_{\alpha_n}^x \frac{t^n}{t-1} dt$$

**b.** Montrer que

$$|f_n(-1)| = \int_{-1}^0 \frac{(-t)^n}{1-t} dt$$

Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  différent de zéro, on a

$$\int_{-1}^0 \frac{(-t)^n}{1-t} dt \leq \int_{-1}^0 (-t)^n dt$$

puis que

$$|f_n(-1)| \leq \frac{1}{n+1}$$

En déduire que la suite  $(f_n(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente et donner sa limite.

**N. B. :** La notation  $\ln$  représente le logarithme népérien.