

## ∞ Baccalauréat S Liban 31 mai 2011 ∞

### EXERCICE 1

**5 points**

#### Commun à tous les candidats

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on donne les trois points :

$$A(1 ; 2 ; -1), B(-3 ; -2 ; 3) \text{ et } C(0 ; -2 ; -3)$$

1.
  - a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
  - b. Démontrer que le vecteur  $\vec{n}(2 ; -1 ; 1)$  est un vecteur normal au plan (ABC).
2. Soit (P) le plan dont une équation cartésienne est  $x + y - z + 2 = 0$ .  
Démontrer que les plans (ABC) et (P) sont perpendiculaires.
3. On appelle G le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, -1) et (C, 2).
  - a. Démontrer que le point G a pour coordonnées  $(2 ; 0 ; -5)$ .
  - b. Démontrer que la droite (CG) est orthogonale au plan (P).
  - c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CG).
  - d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection du plan (P) avec la droite (CG).
4. Démontrer que l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que  $\|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 12$  est une sphère dont on déterminera les éléments caractéristiques.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection du plan (P) et de la sphère (S).

### EXERCICE 2

**3 points**

#### Commun à tous les candidats

*Pour chaque question, une seule des réponses est exacte.*

*Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.*

*Il sera attribué 0,5 point si la réponse est exacte, 0 sinon.*

1. Un magasin de matériel informatique vend deux modèles d'ordinateur au même prix et de marques  $M_1$  et  $M_2$ . Les deux ordinateurs ont les mêmes caractéristiques et sont proposés en deux couleurs : noir et blanc.  
D'après une étude sur les ventes de ces deux modèles, 70 % des acheteurs ont choisi l'ordinateur  $M_1$  et, parmi eux, 60 % ont préféré la couleur noire. Par ailleurs, 20 % des clients ayant acheté un ordinateur  $M_2$  l'ont choisi de couleur blanche.  
On utilise la liste des clients ayant acheté l'un ou l'autre des ordinateurs précédemment cités et on choisit un client au hasard.

- a. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur  $M_2$  de couleur noire est :

$$\text{Réponse A : } \frac{3}{5} \quad \text{Réponse B : } \frac{4}{5} \quad \text{Réponse C : } \frac{3}{50} \quad \text{Réponse D : } \frac{6}{25}$$

- b. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur de couleur noire est :

$$\text{Réponse A : } \frac{21}{50} \quad \text{Réponse B : } \frac{33}{50} \quad \text{Réponse C : } \frac{3}{5} \quad \text{Réponse D : } \frac{12}{25}$$

- c. Le client a choisi un ordinateur de couleur noire. La probabilité qu'il soit de marque  $M_2$  est :

$$\text{Réponse A : } \frac{4}{11} \quad \text{Réponse B : } \frac{6}{25} \quad \text{Réponse C : } \frac{7}{11} \quad \text{Réponse D : } \frac{33}{50}$$

2. Une urne contient 4 boules jaunes, 2 boules rouges et 3 boules bleues.

Les boules sont indiscernables au toucher.

L'expérience consiste à tirer au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

- a. La probabilité d'obtenir trois boules de même couleur est :

$$\text{Réponse A : } \frac{11}{81} \quad \text{Réponse B : } \frac{2}{7} \quad \text{Réponse C : } \frac{5}{84} \quad \text{Réponse D : } \frac{4}{63}$$

- b. La probabilité d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes est :

$$\text{Réponse A : } \frac{2}{7} \quad \text{Réponse B : } \frac{1}{7} \quad \text{Réponse C : } \frac{1}{21} \quad \text{Réponse D : } \frac{79}{84}$$

- c. On répète plusieurs fois l'expérience, de manière indépendante, en remettant à chaque fois les trois boules dans l'urne.

Le nombre minimal d'expériences à réaliser pour que la probabilité de l'évènement « obtenir au moins une fois trois boules jaunes » soit supérieure ou égale à 0,99 est :

$$\text{Réponse A : } 76 \quad \text{Réponse B : } 71 \quad \text{Réponse C : } 95 \quad \text{Réponse D : } 94$$

### EXERCICE 3 Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire

5 points

#### Partie A : Restitution organisée de connaissances

**Prérequis :** On suppose connu le résultat suivant :

Quels que soient les nombres complexes non nuls  $z$  et  $z'$ ,  $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$  à  $2\pi$  près.

Démontrer que, quels que soient les nombres complexes non nuls  $z$  et  $z'$ , on a :  $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$  à  $2\pi$  près.

**Partie B**

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = 1 - i \quad \text{et} \quad z_B = 2 + \sqrt{3} + i.$$

1. Déterminer le module et un argument de  $z_A$ .
2. a. Écrire  $\frac{z_B}{z_A}$  sous forme algébrique
  - b. Montrer que  $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ .
  - c. En déduire la forme exponentielle de  $z_B$ .
3. On note  $B_1$  l'image du point B par la rotation  $r$  de centre O et d'angle  $-\frac{\pi}{6}$ .
  - a. Déterminer l'affixe du point  $B_1$ .
  - b. En déduire que le point  $B_1$  est le symétrique du point B par rapport à l'axe  $(O; \vec{u})$ .
4. Soit  $M$  un point du plan. On note  $M_1$  l'image du point  $M$  par la rotation  $r$  et  $M'$  le symétrique du point  $M_1$  par rapport à l'axe  $(O; \vec{u})$ .

On désigne par (E) l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $M' = M$ .

- a. Montrer que les points O et B appartiennent à l'ensemble (E).
- b. Soit  $M$  un point distinct du point O.  
Son affixe  $z$  est égale à  $\rho e^{i\theta}$  où  $\rho$  est un réel strictement positif et  $\theta$  un nombre réel.  
Montrer que l'affixe  $z'$  du point  $M'$  est égale à  $\rho e^{i(\frac{\pi}{6} - \theta)}$  puis déterminer l'ensemble des valeurs du réel  $\theta$  telles que  $M$  appartienne à l'ensemble (E).
- c. Déterminer l'ensemble (E).

**EXERCICE 3****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité****Partie A : Restitution organisée de connaissances**

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct.

**Prérequis :** L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme  $z' = az + b$  où  $a$  et  $b$  sont deux nombres complexes tels que  $a \neq 0$ .

Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points du plan tels que  $A \neq B$  et  $A' \neq B'$ , alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

**Partie B**

On considère le triangle rectangle isocèle ABC tel que  $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2}$  modulo  $2\pi$ .

On note D le symétrique de A par rapport au point C.

On désigne par  $s$  la similitude directe transformant D en C et C en B.

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude  $s$ .
2. On appelle  $\Omega$  le centre de la similitude  $s$ .
  - a. En utilisant la relation  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{\Omega C} - \overrightarrow{\Omega D}$ , démontrer que  $DC^2 = \Omega D^2$ .
  - b. En déduire la nature du triangle  $\Omega DC$ .
3. On pose  $\sigma = s \circ s$ .
  - a. Quelle est la nature de la transformation  $\sigma$ ? Préciser ses éléments caractéristiques.
  - b. Déterminer l'image du point D par la transformation  $\sigma$ .
4. Démontrer que le quadrilatère  $AD\Omega B$  est un rectangle.
5. Dans cette question, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(A; \vec{u}, \vec{v})$ , choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 1,  $i$  et  $2i$ .
  - a. Démontrer que l'écriture complexe de la similitude  $s$  est :  
 $z' = (1+i)z + 2 - i$  où  $z$  et  $z'$  désignent respectivement les affixes d'un point  $M$  et de son image  $M'$  par  $s$ .
  - b. On note  $x$  et  $x'$ ,  $y$  et  $y'$  les parties réelles et les parties imaginaires de  $z$  et  $z'$ .  
 Démontrer que  $\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$
  - c. Soit J le point d'affixe  $1 + 3i$ .  
 Existe-t-il des points  $M$  du plan dont les coordonnées sont des entiers relatifs et tels que  
 $\overrightarrow{AM'} \cdot \overrightarrow{AJ} = 0$ ,  $M'$  désignant l'image du point  $M$  par  $s$ ?

**EXERCICE 4****7 points****Commun à tous les candidats**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par

$$f(x) = x + e^{-x}.$$

On note  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**Partie A**

1. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .
2. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
3. Montrer que  $(\mathcal{C})$  admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.

**Partie B**

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  à termes positifs définie par :

$$u_1 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_{n+1} = f(u_n) = u_n + e^{-u_n}.$$

1. Démontrer que, pour tout réel  $x$  positif,  $\ln(1+x) \leq x$ .  
 On pourra étudier la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = x - \ln(1+x)$ .

2. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $\ln(n+1) \leq \ln(n) + \frac{1}{n}$ .
3. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $f[\ln(n)] = \ln(n) + \frac{1}{n}$ .
4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $\ln(n) \leq u_n$ .
5. En déduire la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ .

Dans la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2,

$$u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}.$$

6. a. Démontrer que, pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 2, on a :  $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$ .
- b. En déduire que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on a :  $u_n \leq 1 + \ln(n-1)$ .

7. Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on a montré que  $\ln(n) \leq u_n \leq 1 + \ln(n-1)$ .

Démontrer que la suite  $\left(\frac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n \geq 2}$  converge vers 1.