Baccalauréat Liban juin 1964
mathématiques élémentaires [1]

EXERCICE 1

1^er^ sujet

Équation de la parabole rapportée à son axe focal et à sa tangente au sommet.
Application : à l'aide d'une translation convenable des axes, montrer que la courbe d'équation

$$y^2 - 8x + 6 = 0$$

est une parabole, dont on situera les éléments remarquables par rapport aux axes primitifs.

2^e^ sujet

1. Définir un nombre premier.
2. Montrer que tout nombre non premier admet au moins un diviseur premier et que la suite des nombres premiers est illimitée.
3. Reconnaître si le nombre 373 est premier ou non. On exposera et l'on justifiera la méthode employée.

3^e^ sujet

Figure inverse d'un cercle, le pôle d'inversion étant dans le plan du cercle (on étudiera les deux cas, suivant que le pôle d'inversion appartient ou non au cercle ; la réciproque n'est pas demandée).
Préciser dans chaque cas la position de l'inverse du centre du cercle par rapport à la figure inverse.

EXERCICE 2

On donne dans un plan un axe fixe $x'\mathrm{O}x$ et un point fixe F tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}x},\ \overrightarrow{\mathrm{OF}}\right) = \alpha + 2k\pi$, avec $0 < \alpha < \pi$. On pose OF $= d$ (longueur donnée).
Soit F' un point qui décrit l'axe $x'\mathrm{O}x$, sauf le point O, tel que $\overline{\mathrm{O}F'} = x$. On appelle (H) les hyperboles passant par O et admettant F et F' pour foyers.

1. Calculer en fonction de x, d et α le carré $4a^2$ de l'axe focal, le carré $4c^2$ de la distance focale et le carré e^2 de l'excentricité des hyperboles (H). (On aura deux expressions de $4a^2$ et deux expressions de e^2 suivant que x est positif ou négatif.)
   Étudier dans le cas où $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ les variations de la fonction $y = e^2$, quand x varie de 0 à $+\infty$, et construire la courbe représentative. On trouvera une valeur de x qui rend y discontinue.
   Interpréter géométriquement le résultat et dire à quoi se réduit l'hyperbole (H) correspondant à cette valeur de x.

1. Le programme et la nature des épreuves ne sont pas exactement les mêmes que celles du baccalauréat français.

2. Montrer que les hyperboles (H) peuvent se partager en deux familles, dont deux quelconques d'une même famille sont tangentes à une même droite en O et deux hyperboles de familles différentes sont orthogonales en O. Que peut-on dire des cercles directeurs associés aux foyers F' des hyperboles d'une même famille ?

   Soient F'_1 et F'_2 les seconds foyers de deux hyperboles (H_1) et (H_2) de familles différentes. Dire, suivant la position des cercles directeurs associés à F'_1 et F'_2, combien les hyperboles (H_1) et (H_2) ont de tangentes communes.

3. **a.** Montrer que les directrices associées à F des hyperboles de l'une des familles passent par un point fixe, I, et que les directrices associées à F de la seconde famille passent par un second point fixe, I$'$.

   b. Construire les directrices (D), puis les deuxièmes foyers F' des hyperboles d'une même famille, d'excentricité donnée $e > 1$.

   Montrer que le problème admet toujours deux solutions. Montrer aussi que les seconds foyers trouvés sont conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes, indépendants de e, que l'on précisera.

4. On suppose que le déplacement de F' sur $x'\mathrm{O}x$ est régi par la loi

$$x = 1 + 4\cos^2 2t.$$

   Montrer que c'est un mouvement vibratoire simple, dont on déterminera le centre d'oscillation, l'amplitude, la période, la vitesse v et l'accélération γ.

   Chercher une relation entre x et v indépendante du temps t.

N. B. La partie 4 du problème est indépendante des autres.