

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Lille septembre 1983 ∞

EXERCICE 1

Soit (Ω) et (Ω') deux cercles de centre O et de rayons respectifs R et R' avec $0 < R' < R$.
Soit P un point fixé de (Ω') ; à chaque point A de (Ω') distinct de P on associe la droite passant par P et orthogonale à (PA), qui coupe (Ω) en B et C.

1. On note G le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G est un point fixe du segment [OP].
2. Trouver les lieux géométriques des milieux des côtés du triangle ABC.

EXERCICE 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'application φ qui au point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ telles que

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4} \\ y' = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4} \end{cases}$$

1. Montrer qu'il s'agit d'une application affine bijective. Définir son application réciproque φ^{-1} .
2. a. Démontrer que l'ensemble des points invariants par φ est une droite D_O que l'on précisera.
b. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe et que le symétrique de M par rapport à M' appartient à D_O .
c. En déduire une construction simple de M' connaissant le point M.
Préciser la nature de φ .
3. Soit (\mathcal{E}) la courbe d'équation

$$5x^2 + 5y^2 - 6xy - 10x + 6y - 11 = 0.$$

Déterminer une équation de l'image de (\mathcal{E}) par φ . Quelle est la nature de cette courbe image?

PROBLÈME

Soit P le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Soit f l'application numérique d'une variable réelle x définie sur $[0; 8]$ par

$$f(x) = (4 - x^{2/3})^{3/2}.$$

Soit \mathcal{A}_1 sa courbe représentative dans P.

1. Démontrer que f est continue sur $[0; 8]$.
Calculer $f(0)$ et $f(8)$.
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 8}{x} = -\infty$.
3. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0?
Que peut-on conclure pour la courbe \mathcal{A}_1 en son point d'abscisse nulle?
4. Déterminer la dérivée de f sur $]0; 8[$; en déduire les variations de f sur $[0; 8]$.
5. a. Démontrer que f réalise une bijection de $[0; 8]$ sur $[0; 8]$.
b. Déterminer son application réciproque f^{-1} . Que remarquez-vous?
En déduire que la courbe \mathcal{A}_1 admet sur $[0; 8]$ la droite d'équation, $y = x$ comme axe de symétrie.
Que peut-on en déduire sur la tangente à \mathcal{A}_1 en son point d'ordonnée nulle?
- c. Écrire une équation de la tangente à \mathcal{A}_1 au point d'intersection de \mathcal{A}_1 avec la droite d'équation $y = x$.
6. Tracer la courbe \mathcal{A}_1 dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie B

Soit \mathcal{A} la courbe d'équation

$$\sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{x^2} = 4 \quad \text{dans } (O; \vec{i}, \vec{j}).$$

Soit s_1, s_2, s_3, s_4 les symétries orthogonales par rapport aux droites d'équations respectives $y = 0, x = 0, y = x, y = -x$.

1. Vérifier que \mathcal{A} est globalement invariante par chacune de ces symétries.
En déduire que \mathcal{A} est globalement invariante dans trois rotations distinctes de centre O et d'angle non nul; préciser les angles de ces rotations.
2. Démontrer que l'identité de P (notée Id), s_1, s_2, s_3, s_4 et les trois rotations trouvées précédemment constituent un groupe pour la composition des applications.
3. Soit \mathcal{A}' l'ensemble des points M de \mathcal{A} de coordonnées $(x; y)$ tels que $0 \leq x \leq 8$ et $y \geq 0$.
Démontrer que $\mathcal{A}' = \mathcal{D}_1$.
En déduire la représentation graphique de \mathcal{A} dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie C

Dans cette partie, on prend un point C situé sur le cercle de centre O de rayon 8, tel que l'angle de vecteurs $(\vec{i}, \overrightarrow{OC})$ ait une mesure t appartenant à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

On désigne respectivement par A , B et M les projections orthogonales de C sur les droites Ox , Oy et (AB) .

1. Vérifier que $\|\overrightarrow{AB}\|$ est constante.
2. Montrer qu'une équation de la droite (AB) est

$$x \sin t + y \cos t - 8 \sin t \cos t = 0.$$

Démontrer que les coordonnées de M sont

$$\begin{cases} x = 8 \cos^3 t \\ y = 8 \sin^3 t \end{cases}$$

3. Préciser la trajectoire de M quand t décrit l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Calculer les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ de M à l'instant t ; en déduire le réel

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\vec{V}(t)\| dt.$$

5. On suppose dans cette question que t appartient à l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
 - a. Déterminer une équation cartésienne de la tangente en M à la trajectoire. Reconnaitre cette droite.
 - b. Linéariser $\sin^3 x$ et $\cos^3 x$.
Exprimer l'affixe de M en fonction de $\alpha = \cos t + i \sin t$.
 - c. Soit I le barycentre des points O ; A ; B affectés respectivement des coefficients -2 ; 3 ; et 3 .
Vérifier que M est l'image de C dans la rotation de centre I et dont une mesure de l'angle est $-4t$.
En déduire d'une part une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IM})$, et d'autre part que M est sur un cercle de centre I et de rayon indépendant de t .