

∞ Baccalauréat C Lille¹ juin 1984 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

Soit, dans le plan affine euclidien P , un carré ABCD, de côté de longueur c , où $c \in \mathbb{R}_+^*$.
On considère un réel α et f_α l'application du plan dans lui-même

$$f_\alpha : \begin{array}{l} P \rightarrow P \\ M \mapsto M' \end{array}$$

tel que

$$\overrightarrow{MM'} = \alpha \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \alpha \overrightarrow{MD}.$$

1. Déterminer, suivant les valeurs de α , la nature et les éléments caractéristiques de f_α .
2. Déterminer, puis construire l'ensemble E_1 des points M du plan P tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4c^2.$$

3. Déterminer, puis construire l'ensemble E_2 des points M du plan P tels que :

$$\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right\|$$

4. Déterminer, puis construire l'ensemble E_3 des points M du plan P tels que :

$$\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right) = 2c^2.$$

EXERCICE 2

4 POINTS

Dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, on considère l'équation :

$$2z^3 - (7 + 2i)z^2 + (11 + i)z - 4 = 0. \quad (E)$$

1. Montrer que cette équation admet une solution réelle unique α ; la déterminer.
2. Résoudre l'équation (E) et représenter, dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct, les images A, B, C des solutions.
A désigne l'image de la racine réelle et C l'image de la racine qui a le plus grand module.
3. I étant le point du plan d'affixe i , montrer qu'il existe une similitude de centre I qui transforme A en C.
Donner les éléments caractéristiques de cette similitude.

1. Amiens

PROBLÈME

12 POINTS

Partie A

Soit f la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = e^{-x} \ln x.$$

1. Déterminer la fonction dérivée de f et vérifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x) = -\ln x + \frac{1}{x}$.
2. Étudier les variations de la fonction g , et en déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique, notée α , comprise entre $\frac{3}{2}$ et 2. Quel est le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $] \alpha ; +\infty[$?
3. Vérifier l'égalité : $f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$ et déduire, de l'inégalité $\frac{3}{2} < \alpha < 2$, un encadrement de $f(\alpha)$.
4. Acheter l'étude de la fonction f et tracer sa représentation graphique dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie B Recherche d'une valeur approchée de α

1. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$, où h est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h(x) = e^{\frac{1}{x}}.$$

2. Calculer $h'(x)$ et vérifier que

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2 \right], \quad -\frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}}.$$

En déduire qu'il existe un réel $k \in]0; 1[$ tel que

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2 \right], \quad |h'(x)| \leq k.$$

3. Prouver que, pour tout couple de réels distincts x et y compris entre $\frac{3}{2}$ et 2, $|h(x) - h(y)| \leq k|x - y|$.
4. Soit u la suite définie par son premier terme $u_0 = 2$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = h(u_n)$.
 - a. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[\frac{3}{2}; 2 \right]$$

b. En appliquant au couple $(u_n ; \alpha)$ l'inégalité du 3., prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq |u_n - \alpha|,$$

c. En déduire, par un raisonnement par récurrence, l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|,$$

et montrer que la suite u converge vers α .

5. Montrer, en utilisant les variations de h que $u_{n+1} - \alpha$ et $u_n - \alpha$ sont de signes contraires, en déduire que α est compris entre les nombres u_n et u_{n+1} .

En justifiant votre méthode, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie C

On se propose de déterminer toutes les fonctions définies et dérivables deux fois sur \mathbb{R}_+^* , solutions de l'équation différentielle

$$(E) : \quad y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2} e^{-x}.$$

1. Vérifier que la fonction f définie en A est solution de cette équation.
2. Résoudre l'équation différentielle

$$(E') : \quad y'' + 3y' + 2y = 0.$$

3. Soit g une fonction dérivable deux fois sur \mathbb{R}_+^* . Montrer que g est solution de (E) si, et seulement si, $g - f$ est solution de (E').
4. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

N. B. : On notera $\ln x$ le logarithme népérien de x .

La partie C est indépendante des deux autres parties.