Durée : 4 heures

Baccalauréat C Lille juin 1969

Le candidat doit traiter LES DEUX EXERCICES et LE PROBLÈME

1er Exercice — 4 points

On considère dans le plan complexe la transformation ponctuelle

$$z' = \left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)z + 2$$

qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z'.

1. Déterminer le point double de la transformation.
2. Montrer que cette transformation est une similitude directe dont on précisera les éléments.

2e Exercice — 3 points

e étant la base des logarithmes népériens, l'inconnue x et m étant des nombres réels, discuter suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation

$$(m-1)\mathrm{e}^{x} + m\mathrm{e}^{-x} = 2m.$$

Résoudre dans le cas particulier $m = \dfrac{1}{4}$.

Problème — 13 points

Dans un plan π rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, on définit l'application u du plan π privé de l'origine O dans l'ensemble des droites de π ne passant pas par O, par

$$u : M(\alpha, \beta) \longmapsto (D_M) \text{ d'équation } \alpha x - \beta y = 2.$$

1. Montrer que u est bijective.
   Quel est l'ensemble (C) des points M qui appartiennent à leur transformée (D_M) ?
   Préciser la nature de (C).
   Montrer que si M appartient à (C) sa transformée (D_M) est tangente en M à (C).
2. Soient $M(\alpha, \beta)$, $N\left(\alpha_1, \beta_1\right)$. Montrer que
   $M \in (\mathrm{D}_N) \iff N \in (\mathrm{D}_M)$.
   En déduire que si M décrit une droite (Δ) ne passant pas par O, (D_M), passe par un point fixe F.
   Si M décrit la droite (Δ) d'équation $x = 1$, préciser la position du point fixe F et montrer que (D_M) est perpendiculaire à MF.

3. Soit (Γ) le cercle de rayon 2, de centre $\omega(0\,;\,2)$ privé du point O.

   N décrivant (Γ) on pose $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\omega \mathrm{M}}\right) = \theta \qquad \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

   Écrire l'équation de la tangente en M à (Γ).

   En déduire les coordonnées du point N dont elle est la transformée par u.

   On associe de cette manière un point N à tout point M de (Γ).

   Quel est l'ensemble (P) des points N quand M décrit (Γ) ?

   Préciser la nature de (P), et montrer que, pour tout point M de (Γ), (D_M) est tangente en N à (P).

   Quelles sont les coordonnées des points M de (Γ) tels que M et N soient confondus ?

   Montrer qu'en ces points, (C), (Γ) et (P) admettent la même tangente.

4. Étant donné le point M de coordonnées α et β, (D_M) la droite transformée de M, on prend le repère $\left(M, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ déduit du repère $\left(\mathrm{O}\,;\, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ par translation.

   Donner les équations de (C) et (Γ) dans le nouveau repère et démontrer que, si une droite issue de M coupe $(\mathrm{D_M})$ en M_1 et (C) en M' et M'', la division $\left(M, M', M', M''\right)$ est harmonique.