

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Lille juin 1972 ∞

EXERCICE 1

On notera  $0, 1, 2, \dots, (n-1)$  les éléments de l'ensemble  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

1. Résoudre, dans  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ , l'équation

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

2. Trouver les diviseurs de zéro dans l'anneau  $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ . 30 Résoudre, dans  $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ , l'équation

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

EXERCICE 2

On considère la fonction numérique  $f$ , d'une variable réelle, définie par

$$f(x) = 2x - x \operatorname{Log} x$$

( $\operatorname{Log} x$  désigne le logarithme népérien de  $x$ ).

1. Déterminer les limites de  $f(x)$  et de  $\frac{f(x)}{x}$  quand  $x$  tend vers 0 et quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

Étudier les variations de la fonction  $f$  et construire sa représentation graphique (C) dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ; l'unité de longueur étant le segment dont la mesure, en centimètres, est  $\frac{1}{2}$ .

Déterminer les coordonnées du point P, intersection de la courbe (C) et de l'axe des abscisses.

2. En utilisant une intégration par parties, trouver l'aire,  $\mathcal{A}(\lambda)$ , du domaine plan défini par

$$\lambda \leq y \leq e^2, \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x)$$

et  $\lambda$  satisfaisant à la condition  $0 < \lambda < e^2$ .

Déterminer la limite,  $\mathcal{A}$ , de  $\mathcal{A}(\lambda)$  quand  $\lambda$  tend vers 0.

On donnera une valeur approchée de  $\mathcal{A}$  en centimètres carrés avec la précision que permet la donnée de  $e$ , à  $2 \cdot 10^{-4}$  près,  $e \approx 2,718$ .

**PROBLÈME****Partie A**

Soit (P) le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On désigne par l'application de (P) dans (P) qui, au point  $M$  de coordonnées  $x$  et  $y$ , associe le point  $M'$  de coordonnées  $x'$  et  $y'$  définies par les relations

$$x' = 2x + 3y \quad \text{et} \quad y' = x + 2y.$$

On note  $M' = f(M)$ .

1. Quel est l'ensemble des points invariants de l'application  $f$ ?  
Montrer que  $f$  est une application affine de (P) dans (P) et qu'elle est bijective.  
Quelle est l'image d'une droite par  $f$ ?  
Quelle est l'image d'une paire de droites parallèles?
2. a. On se propose de chercher s'il existe des points,  $M$  dont les transformés,  $M'$ , par  $f$  satisfont à une relation de la forme

$$(1) \quad \overrightarrow{OM'} = k \overrightarrow{OM},$$

$k$  étant une constante donnée non nulle.

Montrer qu'il existe, pour la constante  $k$ , deux valeurs possibles, et deux seulement,  $k_1$  et  $k_2$ , si l'on impose à  $\overrightarrow{OM}$  d'être non nul.

Déterminer, pour chacune de ces deux valeurs, les ensembles  $(D)$  et  $(D')$  des points  $M$  satisfaisant à (1).

Montrer que  $(D)$  a pour vecteur directeur  $\vec{T} = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} - \frac{1}{2} \vec{j}$  et que  $(D')$  a pour vecteur directeur  $\vec{J} = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j}$ .

Quelles sont les restrictions de  $f$  respectivement à  $(D)$  et à  $(D')$ ?

- b. Le plan (P) étant rapporté au repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , les coordonnées d'un point quelconque,  $M$ , sont désignées par  $X$  et par  $Y$ , celles de  $M' = f(M)$  par  $X'$  et par  $Y'$ ; montrer que l'on a

$$X' = (2 - \sqrt{3})X \quad \text{et} \quad Y' = (2 + \sqrt{3})Y.$$

3. On suppose  $M$  non situé sur  $(D)$  ou sur  $(D')$ .
  - a. Montrer que  $M$  et  $M'$  appartiennent à une hyperbole,  $(H)$ , asymptote aux droites  $(D)$  et  $(D')$ .
  - b. Soit  $(H)$  l'hyperbole d'équation  $XY = h$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Montrer que l'équation de la droite,  $(\Delta)$ , tangente à  $(H)$  au point  $M_0(X_0; Y_0)$  peut s'écrire sous la forme

$$\frac{X}{2X_0} + \frac{Y}{2Y_0} - 1 = 0.$$

En déduire que la droite  $(\Delta')$ , image de  $(\Delta)$  par  $f$ , est tangente à  $(H)$  au point  $M'_0 = f(M_0)$ .

4. Soit  $(L)$  une droite qui coupe  $(D)$  et  $(D')$  respectivement en  $A$  et en  $B$ . On note  $A' = f(A)$  et  $B' = f(B)$ . Montrer que, s'il existe un réel  $\lambda$  tel que  $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ , alors  $\overrightarrow{A'M'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$ . La droite  $(L)$  étant donnée, montrer qu'il existe une similitude,  $g$ , telle que, quel que soit  $M \in (L)$ , on a  $M' = g(M)$ .

### Partie B

On pose  $u_0 = 1$  et  $v_0 = 0$ . Les formules de récurrence,

$$u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = u_n + 2v_n,$$

définissent deux suites illimitées d'entiers naturels  $(u_0, u_1, \dots, u_n, \dots)$  et  $(v_0, v_1, \dots, v_n, \dots)$ .

1. Montrer que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n^2 - 3v_n^2 = 1$ .
2. Établir les formules de récurrence

$$u_{n+1} + u_{n-1} = 4u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} + v_{n-1} = 4v_n.$$

3. On désigne par  $A_n$  le point de coordonnées  $x = u_n$  et  $y = v_n$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  de la partie A.

Montrer que les points  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  appartiennent à une même conique. Préciser éventuellement les asymptotes.

Montrer que la droite  $(OA_n)$  passe par le milieu du segment  $[A_{n-1}A_{n+1}]$ . En déduire une construction du point  $A_{n+1}$  à partir des points  $A_{n-1}$  et  $A_n$ .