

Durée : 4 heures

♣ Baccalauréat C juin 1975 Lille ♣

EXERCICE 1

Le plan affine euclidien E , rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, est identifié à l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes.

Soit T l'application de E dans E qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = (2 + i)\bar{z} + 1$$

\bar{z} désignant le conjugué de z .

1. Reconnaître la nature de l'application T .
Exprimer les coordonnées $(x' ; y')$ de M' en fonction des coordonnées $(x ; y)$ de M .
Démontrer que T admet un point invariant unique que l'on déterminera.
2. Déterminer les droites du plan globalement invariantes par T .

EXERCICE 2

On note $\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}$ les éléments de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

1. Dresser la table de multiplication dans l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
2. Déterminer les éléments x de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ solutions de l'équation $\dot{4}x = \dot{4}$.
3. Déterminer les couples $(x ; y)$ appartenant à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, solutions du système (S)

$$(S) \quad \begin{cases} \dot{2}x + \dot{4}y = \dot{2} \\ \dot{3}x + \dot{5}y = \dot{5} \end{cases}$$

PROBLÈME

Soit F l'ensemble des fonctions numériques définies sur \mathbb{R} . On rappelle que F , muni de l'addition des fonctions et de la multiplication d'une fonction par un réel est un espace vectoriel.

Soit f_1, f_2, f_3, f_4 les 4 éléments de F définis par :

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = e^x \cos x & f_3(x) = xe^x \cos x \\ f_2(x) = e^x \sin x & f_4(x) = xe^x \sin x \end{array}$$

e est la base de la fonction logarithme népérien,

Partie A

Soit E l'ensemble des fonctions f définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^x (a \cos x + b \sin x + cx \cos x + dx \sin x)$$

où a, b, c, d décrivent \mathbb{R} .

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de F .
2. Démontrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de E .
(On pourra par exemple utiliser $f(0), f(\frac{\pi}{2}), f(\pi), f(\frac{3\pi}{2})$.)
3. Démontrer que tout élément f de E possède une dérivée f' qui appartient aussi à E .
Exprimer les composantes (a', b', c', d') de f' dans la base \mathcal{B} en fonction des composantes (a, b, c, d) de f dans cette base.
4. Soit L l'application de E dans E qui, à tout élément f de E associe f' , fonction dérivée de f .
 - Démontrer que L est un endomorphisme de E , c'est-à-dire une application linéaire de E dans E .
 - Déterminer le noyau de l'endomorphisme L et démontrer que L est bijectif.
 - Dédire de ce qui précède que tout élément f de E admet une primitive φ et une seule appartenant à E .
 Exprimer les composantes $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de φ dans la base \mathcal{B} , en fonction des composantes (a, b, c, d) de f dans cette base.
En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{2\pi} e^x (\cos x + \sin x + x \cos x + x \sin x) dx$$

Partie B

Soit E_1 l'ensemble des fonctions f définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^x (a \cos x + b \sin x) \quad \text{où } (a; b) \in \mathbb{R}^2$$

1. Démontrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de E et que $\mathcal{B}_1 = (f_1; f_2)$ est une base de E_1 .
2. Soit t un réel donné.
À tout élément f de E_1 on associe la fonction f_t définie sur \mathbb{R} par :

$$f_t(x) = f(x+t)$$

- a. Démontrer que f_t est élément de E_1 .
Exprimer les composantes $(a'; b')$ de f_t dans la base \mathcal{B}_1 en fonction de t et des composantes $(a; b)$ de f dans cette base.
- b. Soit φ l'application de E_1 dans E_1 qui, à tout élément f de E_1 associe f_t .
Démontrer que φ est un endomorphisme de E_1
- c. Déterminer la matrice de φ dans la base \mathcal{B}_1 . L'endomorphisme φ est-il bijectif?

N. B. : La partie B peut être abordée dès que les questions 1. et 2., de la partie A ont été traitées.