

♣ Baccalauréat C Lille juin 1977 ♣

EXERCICE 1

4 POINTS

1. Résoudre l'équation : $3b - 8a = 0$ où $(a ; b) \in \mathbb{Z}^2$.
En déduire l'ensemble des couples $(a ; b)$ de \mathbb{Z}^2 qui sont solutions de l'équation :

$$(a ; b) \in \mathbb{Z}^2 \quad 3b - 8a = 1.$$

2. Un entier naturel non nul A , s'écrit $\overline{b0a}$ dans le système de numération de base cinq et \overline{abc} dans le système de numération de base sept.
Déterminer a, b, c et donner l'expression de A dans le système decimal.
N. B. 0 représente l'élément neutre de l'addition dans \mathbb{N} .

EXERCICE 2

3 POINTS

On considère l'application f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} qui à tout nombre complexe z , associe

$$z' = f(z) = 2i\bar{z} + 2 - i,$$

\bar{z} désignant le nombre complexe conjugué de z .

On désigne par F la transformation du plan complexe, qui au point M d'affixe z , fait correspondre le point $M' = F(M)$, d'affixe $z' = f(z)$.

1. La transformation F admet-elle des points invariants?
2. Déterminer la nature de F et préciser les éléments géométriques qui la caractérisent : centre, rapport, axe.

PROBLÈME

13 POINTS

Soit \mathcal{F} l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , deux fois dérivables sur \mathbb{R} . On rappelle que \mathcal{F} , muni de l'addition des applications et de leur multiplication par un scalaire réel, a une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Partie A

Soit E le sous-ensemble de \mathcal{F} tel que :

$$E = \left\{ f \in \mathcal{F}, \quad f'' - f' + \frac{1}{4}f = \bar{0} \right\}$$

f' désignant la fonction dérivée première de f , f'' la fonction dérivée seconde et $\bar{0}$ l'application nulle de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1. Démontrer que E , muni de l'addition des applications et de leur multiplication par un scalaire réel, a une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} .

2. a. Démontrer que si f est élément de E , alors l'application g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^{-x/2} f(x)$$

appartient à \mathcal{F} , et que sa fonction dérivée seconde coïncide avec $\bar{0}$.

- b. Réciproquement, démontrer que si g est élément de \mathcal{F} tel que sa fonction dérivée seconde coïncide avec $\bar{0}$, alors il existe un élément f de E tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^{-x/2} f(x)$$

- c. En déduire que :

$$E = \{f \in \mathcal{F}, \exists (a; b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (ax + b)e^{x/2}\}.$$

On notera $f_{a, b}$ l'élément de E tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{a, b}(x) = (ax + b)e^{x/2}.$$

3. Démontrer que $(f_{1, 0}, f_{0, 1})$ est une base de E . On la note B . Qu'en déduit-on sur la dimension de E ?

Si $f_{a, b}$ est élément de E , donner ses coordonnées dans la base B .

4. Démontrer que si $f_{a, b}$ est élément de E , sa fonction dérivée première est élément de E .

5. On considère alors l'application φ de E dans E qui à tout élément $f_{a, b}$ de E associe $f'_{a, b}$.

- a. Vérifier que φ est un endomorphisme de E et déterminer sa matrice dans la base B .

- b. φ est-il un automorphisme de E ? Si oui, donner l'expression de $\varphi^{-1}(f_{a, b})(x)$ pour $f_{a, b}$ élément de E et pour tout x réel.

Que représente $\varphi^{-1}(f_{a, b})$ pour $f_{a, b}$?

6. On considère l'élément $f_{1, 1}$ de E . Donner l'expression de $f_{1, 1}(x)$ pour tout x réel, étudier le sens de variation de cette fonction et tracer sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Calculer l'aire \mathcal{A} du domaine D du plan tel que :

$$D = \{M(x; y), \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq f_{1, 1}(x)\},$$

- a. en utilisant le 5.
b. par un calcul direct d'intégrale.

Partie B

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite (h_n) d'éléments de E telle que :

$$h_1 = f_{1, 1} \quad \text{et} \quad 4h'_{n+1} = h_n.$$

où h'_{n+1} désigne la fonction dérivée de h_{n+1} .
On posera :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_n(x) = (U_n x + V_n) e^{x/2}, \quad (U_n; V_n) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Exprimer U_{n+1} et V_{n+1} en fonction de U_n et V_n . En déduire qu'il existe un endomorphisme ψ de E tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h_{n+1} = \psi(h_n)$$

Écrire la matrice A de ψ dans la base B .

2. Calculer A^2 et A^3 .

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2n & 1 \end{pmatrix}.$$

En déduire l'expression de U_n et V_n en fonction de n , pour n élément de \mathbb{N}^* .

Donner alors, pour tout élément $n \in \mathbb{N}^*$, et tout x réel, l'expression de $h_n(x)$.