Durée : 4 heures

Baccalauréat C Lille juin 1979

EXERCICE 1 **3 points**

On considère l'équation :

$$36x - 25y = 5 \quad (x\ ;\ y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

1. Montrer que pour toute solution $(x\ ;\ y)$, x est multiple de 5.
2. Déterminer une solution particulière de l'équation. Puis la résoudre.
3. Soit d le plus grand commun diviseur de x et de y lorsque $(x\ ;\ y)$ est solution de l'équation.

   Quelles sont les valeurs possibles de d ?

   Quelles sont les solutions pour lesquelles x tel y sont premiers entre eux?

EXERCICE 2 **4 points**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z \in \mathbb{C}, \quad z^3 + (-7+5\text{i})z^2 + (29-16\text{i})z - 3(17-\text{i}) = 0$$

après avoir démontré qu'elle admet une racine réelle.

PROBLÈME **13 points**

A

On considère les applications f_1, f_2, f_3 de $]-1\ ;\ +1[$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in]-1\ ;\ +1[\quad f_1(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f_2(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f_3(x) = \frac{1}{1+x}\log\frac{1+x}{1-x}.$$

Soit $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ engendré par le système $\{f_1, f_2, f_3\}$.

1. Démontrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathscr{F}$.
2. Soit f un élément de $\mathscr{F}$, de coordonnées (a, b, c) dans la base (f_1, f_2, f_3).

   On appelle $\overline{f}$ l'application de $]-1\ ;\ +1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

   $$\forall x \in]-1\ ;\ +1[, \quad \overline{f}(x) = \left(1-x^2\right) f'(x) - xf(x).$$

   Calculer $\overline{f}(x)$ en fonction de $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$.

   En déduire que $\overline{f}$ est élément de $\mathscr{F}$.
3. On désigne par φ l'endomorphisme de $\mathscr{F}$ qui à f, associe $\overline{f}$.
   a. Déterminer $\overline{f_3} = \varphi\left(f_3\right)$ par ses coordonnées dans la base $\left(f_1, f_2, f_3\right)$

b. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $\varphi^{n+1} = \varphi^n \circ \varphi$.
Démontrer que les coordonnées de $\varphi^n\left(f_3\right)$ sont :

$$\left(2n.(-1)^{n+1}\ ;\ 0\ ;\ (-1)^n\right)$$

4. On considère l'ensemble des applications g_n ($n \in \mathbb{N}$) de $]-1\ ;\ +1[$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$g_0 = \frac{f_3}{f_1} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ g_n = \frac{\varphi^n\left(f_3\right)}{f_1}.$$

a. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1\ ;\ +1[, \quad g_n(x) = (-1)^n\left[-2n + \ln\frac{1+x}{1-x}\right].$$

b. Étudier suivant la parité de n, les variations de g_n. Préciser $g_n(0)$ et $g_n'(0)$.

c. On appelle (C_n) la courbe représentative de g_n dans un plan affine (P) muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$.
Démontrer que pour tout entier naturel n, (C_{2n}) est l'image de (C_0) par une translation T_{2n} de (P) dans (P) que l'on précisera et que (C_{2n+1}) est l'image de (C_1) par une translation T_{2n+1} de (P) dans (P) que l'on précisera également.

d. Tracer dans le plan (P) les courbes (C_0) et (C_1).
En utilisant le 4. c, tracer (C_2) et (C_3).
Montrer que, pour tout entier naturel n le point d'intersection ω_n de (C_n) avec l'axe $y'\text{O}y$ est un centre de symétrie pour (C_n). Tracer la tangente à (C_0) en ω_0 et à (C_1) en ω_1.

e. Déterminer les coordonnées x_0, y_0 du point M_0 de (P) commun à (C_0) et (C_1).
Calculer l'aire du sous-ensemble de (P) délimité par (C_0), (C_1),les droites d'équation $x = 0$ et $x = x_0$.

B

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3, muni d'une base $\mathcal{B} = \left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
α et β étant deux réels, on considère l'endomorphisme $\Psi_{\alpha,\beta}$ de E défini par les équations :

$$\left\{\begin{array}{lcrrr} x' &=& (\alpha-1)x+ & & 2\beta z \\ y' &=& \alpha x+ & \beta y & \\ z' &=& & & -\beta z \end{array}\right.$$

1. Si $\vec{u}$ est un élément de E, calculer les coordonnées de $\left(\Psi_{\alpha\beta} \circ \Psi_{\alpha\beta}\right)\left(\vec{u}\right)$.

2. Existe-t-il un couple $(\alpha,\ \beta)$ tel que $\Psi_{\alpha\beta}$ soit une projection vectorielle ?
Dans l'affirmative, la caractériser.

3. Existe-t-il un couple $(\alpha,\ \beta)$ tel que $\Psi_{\alpha\beta}$ soit une symétrie vectorielle ?
Dans l'affirmative, la caractériser.

4. Dans le cas particulier où E est l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ de la partie **A**, montrer que pour un choix convenable de $\mathcal{B}$, il existe un couple $(\alpha,\ \beta)$ tel que $\Psi_{\alpha\beta} = \varphi$.