

♣ Baccalauréat C Lille juin 1981 ♣

EXERCICE 1

3 POINTS

1. Décomposer 319 en produit de facteurs premiers.
2. Démontrer que si x et y sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même pour $3x + 5y$ et $x + 2y$.
3. Résoudre dans \mathbb{N}^* le système

$$\begin{cases} (3a + 5b)(a + 2b) = 1276 \\ ab = 2m \end{cases}$$

où m désigne le plus petit multiple commun de a et b .

EXERCICE 2

4 POINTS

Un plan affine euclidien orienté (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Le point M de coordonnées $(x; y)$ a pour affixe le nombre complexe $z = x + iy$. On considère dans le plan (P) le triangle équilatéral OAB où B a pour affixe 1 et A a une ordonnée positive.

1. Soit D le milieu de AB et E le milieu de OB . Déterminer les affixes des points A , D et E . Placer sur une figure les points O , A , B , D , E dans le repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
2. Combien y a-t-il d'applications affines du plan (P) transformant l'ensemble $\{O, A, B\}$ en l'ensemble $\{E, D, B\}$?
3. On considère l'application affine g caractérisée par

$$g(A) = D, \quad g(O) = B \quad \text{et} \quad g(B) = E.$$

Montrer que g est une similitude indirecte dont on donnera les éléments caractéristiques et la forme réduite (ou décomposition canonique).

(M étant un point d'affixe z , on pourra exprimer l'affixe z' de son image M' , en fonction de z).

PROBLÈME

13 POINTS

Partie A

On appelle F l'ensemble des applications f continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant

$$(1) \quad \begin{cases} f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ f(0) \geq 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que la fonction $x \mapsto 2^{-x^2}$ appartient à F .

2. Écrire ce que devient la relation (1) dans chacun des cas suivants :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = y.$$

Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?

3. Montrer que $f(0) = 0$ si, et seulement si f est l'application identiquement nulle notée $\tilde{0}$.
4. On suppose que f s'annule pour une valeur $a \neq 0$.
- a. On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \frac{a}{2^n}.$$

Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

- b. Montrer par récurrence sur l'entier n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(U_n) = 0$ (utiliser la question 2).
En déduire alors que $f(0) = 0$.
5. On suppose $f \neq \tilde{0}$. Calculer $f(0)$.
Montrer que f ne s'annule jamais et que, pour tout x réel, $f(x) > 0$. Montrer que f est une fonction paire.

Partie B

Soit G l'ensemble des fonctions g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies par

$$\exists f \in F - \{\tilde{0}\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \log[f(x)].$$

1. Montrer à l'aide de la relation (1) vérifiée par f , que tout élément g de G vérifie la relation

$$(2) \quad \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x+y) + g(x-y) = 2[g(x) + g(y)].$$

2. Déterminer $g(0)$ et montrer que g est une fonction paire.
3. Montrer à l'aide de la relation (2) que

$$(3) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(nx) = n^2 g(x).$$

Montrer que la relation (3) reste vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$.

4. Montrer que

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(rx) = r^2 g(x).$$

(on pourra poser $r = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$).

On pose $g(1) = \lambda$. En déduire que $\forall r \in \mathbb{Q}, g(r) = \lambda r^2$. En déduire $f(r)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

Partie C

On admet dans toute la suite que les fonctions de F distinctes de $\tilde{0}$ sont les fonctions de la forme f_λ , où λ est un paramètre réel quelconque, définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad f_\lambda(x) = e^{\lambda x^2}.$$

On note \mathcal{C}_λ la courbe représentative de f_λ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier les variations de f_λ suivant les valeurs de λ . Pour quelles valeurs de λ la courbe \mathcal{C}_λ a-t-elle une asymptote?-
2. Montrer que si $\lambda > 0$, il existe sur \mathcal{C}_λ deux points A_λ et B_λ en lesquels la tangente passe par l'origine.
Exprimer les coordonnées de A_λ et B_λ en fonction de $\lambda > 0$. Quel est l'ensemble formé par les points A_λ et B_λ lorsque λ varie?