

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Lille ∞

EXERCICE 1

4 points

1. Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation

$$(1) \quad 9x - 22y = 55.$$

2. Déterminer les couples solutions de l'équation (1) tels que le plus grand commun diviseur de x et de y soit 55.

EXERCICE 2

4 points

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation d'inconnue z

$$z^4 - (10i - 5)z^2 - 14i - 48 = 0.$$

2. On appelle z_1, z_2, z_3, z_4 les solutions de cette équation en supposant que

$$\Re(z_4) < \Re(z_3) < 0 < \Re(z_2) < \Re(z_1)$$

où $\Re(z_i)$ représente la partie réelle de z_i avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Soit M_1 et M_2 les points du plan complexe d'affixes respectives $2 + i$ et $1 + 3i$.

Déterminer les deux similitudes laissant le point O d'affixe 0 invariant et transformant M_1 en M_2 . On précisera les éléments caractéristiques de ces similitudes.

PROBLÈME

12 points

Soit \mathcal{F} l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des applications de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ dans \mathbb{R} muni de l'addition des fonctions et de leur multiplication par un scalaire.

Soit \mathcal{E} l'ensemble des applications de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ dans \mathbb{R} définies par

$$f: \begin{array}{l} \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x(a + b \sin x + c \cos x) \end{array}$$

où a, b et c sont trois réels quelconques.

Partie A

On appelle g l'élément de \mathcal{E} correspondant au cas où $a = 0, b = c = 1$.

1. Étudier les variations de g , démontrer que g réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J , que l'on déterminera.

Si l'on appelle g l'application telle que

$$\begin{array}{ccc} \tilde{g}: & \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] & \rightarrow J \\ & x & \mapsto g(x) \end{array}$$

étudier la dérivabilité de la fonction réciproque $h = \tilde{g}^{-1}$. Préciser $h'(1)$.

2. Tracer la courbe représentative C de \tilde{g} dans un plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé \mathcal{R} (unité 2 cm).

Construire la tangente à C au point d'abscisse 0. Tracer dans le même repère la courbe représentative C' de h .

3. a. À l'aide éventuellement d'une double intégration par parties, calculer

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^x (\sin x + \cos x) dx.$$

- b. Calculer l'aire \mathcal{A} du domaine \mathcal{D} du plan compris entre C , les droites d'équations $y = x$, $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$ dans le repère \mathcal{R} .

En déduire l'aire \mathcal{A}' du domaine \mathcal{D}' du plan compris entre C' , les droites d'équations $y = x$, $y = \frac{\pi}{2}$ et $y = -\frac{\pi}{2}$ dans le repère \mathcal{R} .

Partie B

1. Démontrer que \mathcal{E} est un sous-espace vectoriel de \mathcal{F} admettant pour base $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$, avec

$$\begin{array}{ccc} f_1: & \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto e^x. \\ f_2: & \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto e^x \sin x. \\ f_3: & \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto e^x \cos x. \end{array}$$

2. Soit f un élément de \mathcal{E} de coordonnées $(a; b; c)$ dans la base \mathcal{B} . Démontrer que la fonction dérivée première f' et la fonction dérivée seconde f'' sont des éléments de \mathcal{E} dont on donnera les coordonnées dans la base \mathcal{B} . Préciser $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$ en fonction de a, b, c .
3. Soit φ l'endomorphisme de \mathcal{E} qui, à la fonction f de coordonnées a, b, c dans la base \mathcal{B} associe la fonction \tilde{f} de coordonnées

$$a' = 3a + 4b, b' = -2a - 3b \text{ et } c' = 2a + 2b - c,$$

dans la même base.

- a. Déterminer D, ensemble des éléments de \mathcal{E} invariants par φ et vérifier que

$$D = \left\{ f \in \mathcal{E} / f' \left(\frac{\pi}{2} \right) = f'' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0 \right\}$$

- b. Déterminer P, ensemble des éléments de \mathcal{E} changés par φ en leur opposé et vérifier que

$$P = \left\{ f \in \mathcal{E} / f \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0 \right\}$$

- c. Démontrer que D et P sont supplémentaires dans \mathcal{E} . En déduire la nature de φ et l'ensemble des éléments de \mathcal{E} vérifiant

$$f \left(\frac{\pi}{2} \right) = f' \left(\frac{\pi}{2} \right) = f'' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0.$$

4. Soit Φ l'application de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans \mathbb{R} définie par

$$\Phi(f, g) = f \left(\frac{\pi}{2} \right) g \left(\frac{\pi}{2} \right) + f' \left(\frac{\pi}{2} \right) g' \left(\frac{\pi}{2} \right) + f'' \left(\frac{\pi}{2} \right) g'' \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

- a. Démontrer que Φ est un produit scalaire défini sur \mathcal{E} . Dans toute la suite du problème, \mathcal{E} est muni de ce produit scalaire.
 b. Vérifier que le plan vectoriel P et la droite vectorielle D introduits en B 3. sont orthogonaux et préciser alors φ .
5. a. Vérifier que, pour le produit scalaire Φ , la base \mathcal{B} n'est pas orthonormée.
 b. On donne

$$g_1 : \begin{array}{l} \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{x-\frac{\pi}{2}} (2 - 2 \sin x + \cos x) \end{array}$$

Vérifier que g_1 est normé. Trouver g_2 normé, orthogonal à g_1 appartenant à P et tel que $g_2'' \left(\frac{\pi}{2} \right) > 0$.

Soit g_3 le vecteur normé de D tel que $g_3 \left(\frac{\pi}{2} \right) > 0$. Déterminer g_3'' et démontrer que (g_1, g_2, g_3) est une base orthonormée qu'on notera \mathcal{B}' .