

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1985 Lille ∞

EXERCICE 1

5 points

On considère la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 2, \quad u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}.$$

1. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

Quel est l'ensemble de définition de f ?

Montrer que f est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.

2. Montrer que, pour tout entier k au moins égal à 2, on a

$$\frac{1}{k \ln k} \geq \int_k^{k+1} f(x) dx.$$

En déduire une minoration de u_n par une intégrale.

3. Calculer $\int_2^n f(x) dx = I_n$ en fonction de n ($n \in \mathbb{N}$, $n > 2$) puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

La suite (u_n) a-t-elle une limite quand n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 2

3 points

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$(z^2 - 4z + 5) - i(z + 1) = 0.$$

2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0.$$

3. En déduire qu'il existe des réels A, B, C, D qu'on déterminera tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x^2 + 4x + 5)^2 + (x + 1)^2 = (x^2 + Ax + B)(x^2 + Cx + D).$$

PROBLÈME

12 points

Le but du problème est d'étudier les images de quelques figures simples par des applications complexes.

Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On note A, B et C les points de P de coordonnées respectives :

$$\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad (1; 0).$$

Partie A

1. Démontrer qu'il existe une application affine de \mathbb{P} , s et une seule, qui laisse invariants les deux points A et B et qui transforme O en C . Préciser la nature et les éléments caractéristiques de s .
2. Pour tout point M du plan, exprimer les coordonnées (x', y') de $s(M)$ en fonction des coordonnées $(x; y)$ de M , puis l'affixe z' de $s(M)$ en fonction de l'affixe z de M .
3. Déterminer l'image par s du cercle de centre O et de rayon 1.

Partie B

On considère l'application F de \mathbb{P} dans \mathbb{P} qui à tout point m d'affixe z associe le point M d'affixe $Z = z^2 + 1$.

1.
 - a. Déterminer les images par F des points A , B et O .
 - b. Déterminer les points invariants par F .
2.
 - a. Démontrer que tout point M de \mathbb{P} , à l'exception d'un seul que l'on précisera, admet par F deux antécédents distincts m_1 et m_2 symétriques par rapport à O .
 - b. On note Z l'affixe de M , distinct de C , et z_1 et z_2 les affixes respectives de m_1 et m_2 . Démontrer que :

$$\begin{aligned} Om_1 &= Om_2 = \sqrt{CM} \\ \arg z_1 &= \frac{1}{2}\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \arg z_2 &= \frac{1}{2}\alpha + \pi + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

où α est une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{CM})$.

- c. On se propose de construire géométriquement m_1 et m_2 .

Soit (D) la droite passant par O et de vecteur directeur \vec{u} tel que $\frac{\alpha}{2}$ soit une mesure de (\vec{i}, \vec{u}) .

Soit (D') la perpendiculaire à (D) passant par O . Sur (D') , de part et d'autre de O , on place les points N et P tels que :

$$OP = 1 \quad ON = CM.$$

Soit (Γ) le cercle de diamètre $[PN]$.

Démontrer que (Γ) coupe (D) en m_1 et m_2 .

3. Déterminer l'image par F du cercle de centre O et de rayon 1.
 - a. Pour tout point m de coordonnées $(x; y)$, on note $(X; Y)$ les coordonnées du point $M = F(m)$. Exprimer X et Y en fonction de x et y .
 - b. Déterminer l'image par F de l'axe des abscisses puis de l'axe des ordonnées.

- c.** Déterminer l'ensemble des points du plan dont l'image par F appartient à l'axe des abscisses.
- 4.** (Δ) désigne la droite d'équation $y = 2$.
- a.** Démontrer que l'image de (Δ) par F est la courbe (\mathcal{C}) d'équation $y^2 = 16(x + 3)$.
- b.** Préciser la nature et les éléments caractéristiques de cette courbe : axe, sommet, foyer, directrice.
- c.** Construire (\mathcal{C}) .