Baccalauréat C Lille juin 1988

EXERCICE 1 **4 POINTS**

On donne dans le plan un point O et une droite (Δ) ne passant pas par O.
On se propose de donner une construction de l'intersection d'une droite (D) passant par O et non perpendiculaire à (Δ) avec l'ellipse (E) d'excentricité associée $\dfrac{1}{2}$, de foyer O et de directrice associée (Δ).
On note $\overrightarrow{i}$ un vecteur unitaire orthogonal à (Δ) et $\overrightarrow{j}$ un vecteur unitaire de (D).

1. Pour tout point M de (D), on définit les deux points H et H′ tels que $\overrightarrow{\text{MH}}$ et $\overrightarrow{\text{MH}'}$ soient orthogonaux à (Δ) et de même norme égale à 2 MO.

Montrer que, lorsque M décrit (D), H et H′ décrivent deux droites (D_1) et (D_2) passant par O, dont on précisera un vecteur directeur en fonction de $\overrightarrow{i}$ et de $\overrightarrow{j}$.

2. L'une des droites (D_1) et (D_2) peut-elle être parallèle à (Δ) ?

3. Utiliser les questions précédentes pour construire l'intersection de l'ellipse (E) et de la droite (D).

Faire une figure soignée dans laquelle on prendra 4 cm pour la distance de O à (Δ) et $\dfrac{\pi}{3}$ pour une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Il n'est pas demandé de construire l'ellipse (E).

EXERCICE 2 **4 POINTS**

On considère dans le plan (P) orienté le losange AIBI′.
Soit r la rotation de centre A qui transforme I en I′.
Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble des points M du plan tels que M, B et l'image M′ de M par r soient sur une même droite.

1. Soit C le point dont l'image par r est B.

Démontrer que C est sur le cercle de centre I et de rayon IA.

2. En supposant M distinct de B et de C, démontrer que M, B et M′ sont alignés si, et seulement si,

$$\left(\overrightarrow{\text{CM}'}, \overrightarrow{\text{CA}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{BM}'}, \overrightarrow{\text{BA}}\right) \quad \text{modulo } \pi.$$

3. En déduire l'ensemble des points M tels que M, B et M′ oient sur une même droite.

PROBLÈME **4 POINTS**

On désigne par f_λ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\lambda(x) = 1 - \text{e}^{-\lambda x},$$

où λ est un réel strictement positif donné.

On note $(\mathscr{C}_\lambda)$ la courbe représentative de la fonction f_λ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On définit enfin la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 &=& 1\,\text{et}\\ ,u_{n+1} &=& f_\lambda(u_n), \text{pour tout entier naturel } n\end{array}\right.$$

Partie A

Dans cette partie on se propose d'étudier la famille de fonctions f_λ et la famille des courbes $(\mathscr{C}_\lambda)$.

1. Étudier le sens de variations de la fonction f_λ et préciser les limites de f_λ, en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. **a.** Vérifier que la courbe $(\mathscr{C}_\lambda)$ passe par l'origine O et écrire une équation de la tangente en O à $(\mathscr{C}_\lambda)$.

   b. Soit M un point quelconque du plan, H son projeté orthogonal sur l'axe des ordonnées $(y'y)$ et M′ le point défini par la relation $\overrightarrow{\text{HM}} = \lambda.\overrightarrow{\text{HM}'}$.
   Démontrer que M appartient à $(\mathscr{C}_\lambda)$ si, et seulement si, M' appartient à $(\mathscr{C}_1)$.

   c. Construire avec soin la courbe $(\mathscr{C}_1)$, en prenant 2 cm pour unité, puis la courbe $(\mathscr{C}_2)$ en appliquant le résultat du b.
3. On envisage ici l'étude de l'intersection de la courbe $(\mathscr{C}_\lambda)$ et de la droite (Δ) d'équation $y = x$.
   Pour cela, on pose g_λ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$g_\lambda(x) = f_\lambda(x) - x.$$

   a. Dresser le tableau de variations de g_λ en précisant les limites aux bornes.
   Démontrer que g_λ admet un maximum absolu $m(\lambda)$; exprimer en fonction de λ la valeur de x telle que $g_\lambda(x) = m(\lambda)$ et démontrer que

   $$m(\lambda) = 1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{\ln\lambda}{\lambda}.$$

   b. En remarquant que $g_\lambda(0) = 0$, établir que $m(\lambda)$ est strictement positif si λ est différent de 1.

   c. Déduire des questions précédentes le nombre des solutions réelles de l'équation $g_\lambda(x) = 0$ et leur signe (on discutera suivant la position de λ par rapport à 1).
   Conclure quant à l'intersection de $(\mathscr{C}_\lambda)$ et de (Δ).

Partie B

Dans cette partie, on fixe $\lambda = 2$ et on note x_2 l'unique solution strictement positive de l'équation $g_2(x) = 0$ étudiée dans la partie A.
On se propose la recherche de valeurs approchées de x_2 à l'aide de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie dans le préambule avec $\lambda = 2$.

1. Déterminer le signe de $g_2(1)$ et celui de $g_2(\ln 2)$.
   En déduire l'encadrement
   $$\ln 2 \leqslant x_2 \leqslant 1.$$
2. Démontrer par récurrence sur n, en utilisant l'étude des variations de f_2, que, pour tout entier naturel n, on a $x_2 \leqslant u_n \leqslant 1$.
3. b) En strictement positif si À. est différent de 1. remarquant
4. Calculer $f_2'(\ln 2)$ et démontrer que, si x est égal à $\ln 2$, alors
   $$0 \leqslant f_2'(x) \leqslant \frac{1}{2}.$$
   En déduire que, pour tout entier naturel n, on a
   $$u_{n+1} - x_2 \leqslant \frac{1}{2}\left(u_n - x_2\right).$$
   Démontrer que, pour tout entier naturel n, l'inégalité
   $$u_n - x_2 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
   Prouver alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_2.
   Application numérique : déduire de l'étude précédente une valeur approchée décimale à 10^{-2} près de x_2.

Partie C

Dans cette partie, on fixe $\lambda = 1$ et on se propose d'étudier dans ce cas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie dans le préambule.
On pourra utiliser le résultat suivant : $g_1(x)$ est strictement négatif pour tout réel x non nul.

1. Prouver que, pour n entier naturel, tous les termes u_n sont strictement positifs et étudier le sens des variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   En déduire que cette suite est convergente et calculer sa limite.
2. **a.** Pour tout réel x positif, démontrer que l'on a $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$ et en déduire que
   $$f_1(x) \geqslant \frac{x}{1+x}.$$
   b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a
   $$u_{n+1} \geqslant \frac{u_n}{1+u_n} \quad \text{et que} \quad \frac{1}{u_{n+1}} \leqslant 1 + \frac{1}{u_n}.$$
   c. Établir par récurrence que, pour tout entier naturel n,
   $$u_n \geqslant \frac{1}{n+1}.$$